УДК 514.76

К. В. Полякова[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

[1] polyakova_@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-9

О тензоре кручения аффинной связности на двумерном и трехмерном многообразиях

Основой данного исследования аффинных связностей в расслоении линейных реперов над гладким многообразием являются структурные уравнения этого расслоения. В данном расслоении способом Лаптева — Лумисте задана аффинная связность. Найдены дифференциальные уравнения на компоненты тензора деформации от произвольной аффинной связности к канонической связности. Найдены выражения на компоненты тензора кручения в случае двумерного и трехмерного многообразий. Для двумерного многообразия кручение представляет собой дробь, числителем которой является линейная комбинация двух слоевых координат с коэффициентами — двумя функциями, зависящими от базисных координат, а знаменателем — определитель, составленный из слоевых координат. Для трехмерного многообразия произвольность числителя определяется девятью функциями, зависящими от базисных координат.

Ключевые слова: двумерное многообразие, трехмерное многообразие, расслоение линейных реперов, структурные уравнения, базисные и слоевые координаты, кручение аффинной связности.

Поступила в редакцию 21.05.2021 г.

1. Ковариантное задание аффинной связности 1-го порядка

Рассмотрим окрестность m-мерного гладкого многообразия X_m, в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i ($i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m$). Формы инвариантного корепера $\{\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}\}$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx^i_j, dx^i_{jk}\}$ выражаются по формулам [3]

$$\omega^i = x^i_j dx^j,$$

$$\omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k, \tag{1}$$

$$\omega^i_{jk} = dx^i_{jk} + x^l_{jk}\omega^i_l - x^i_{lk}\omega^l_j - x^i_{jl}\omega^l_k + (x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl})\omega^l.$$

Слоевые координаты 1-го порядка x^i_j образуют невырожденную матрицу, для которой $\left(\overset{*}{x}{}^i_j\right)$ — обратная матрица, то есть $\overset{*}{x}{}^i_j x^j_k = \delta^i_k$. Слоевые координаты 2-го и 3-го порядков x^i_{jk}, x^i_{jkl} симметричны по нижним индексам, в остальном слоевые координаты произвольны и рассматриваются как независимые переменные [3].

В расслоении $L(X_m)$ касательных линейных реперов над многообразием X_m способом Лаптева — Лумисте [2, с. 62; 5; 6; 8] посредством форм $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k$ зададим аффинную связность с компонентами Γ^i_{jk}, удовлетворяющими уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk,l}\omega^l, \tag{2}$$

где $\Gamma^i_{jk,l}$ — это пфаффовы, или обобщенные частные, производные. В уравнениях (2) рассмотрим действие тензорного дифференциального оператора Δ [1]

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^s_{jk}\omega^i_s - \Gamma^i_{sk}\omega^s_j - \Gamma^i_{js}\omega^s_k ,$$

переходя к натуральному кореперу по формулам (1), а также учитывая, что $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^l, x^l_s, x^l_{sp})$ — это функции базисных x^l и слоевых координат x^l_s, x^l_{sp}, получим [4]

$$\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}dx^l + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_s}dx^l_s + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_{sp}}dx^l_{sp} = -\delta^i_l\delta^s_j\delta^p_k dx^l_{sp} +$$

$$+\left(\delta^i_l(\Gamma^p_{jk} + x^p_{jk})\overset{*}{x}{}^s_p - (\Gamma^i_{lk} + x^i_{lk})\overset{*}{x}{}^s_j - (\Gamma^i_{jl} + x^i_{jl})\overset{*}{x}{}^s_k\right)dx^l_s + \qquad (3)$$

$$+(...)^i_{jkl}dx^l .$$

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах dx^l_{sp} в (3) дает равенства $\dfrac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_{sp}} = -\delta^i_l\delta^s_j\delta^p_k$, откуда следует разложение (ср. [7])

$$\Gamma^i_{jk} = -x^i_{jk} + \gamma^i_{jk}$$

с помощью слоевых координат 2-го порядка x^i_{jk} и тензора *деформации* (генератор [7]) $\gamma^1 = \{\gamma^i_{jk}\}$ от аффинной связности Γ^i_{jk} к канонической плоской связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$. Тензор деформации $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^p_q)$ зависит только от базисных координат x^l и слоевых координат 1-го порядка x^p_q.

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах dx_s^l дает

$$\frac{\partial\gamma_{jk}^i}{\partial x_s^l} = \delta_l^i \gamma_{jk}^p \overset{*}{x}{}_p^s - \gamma_{lk}^i \overset{*}{x}{}_j^s - \gamma_{jl}^i \overset{*}{x}{}_k^s . \qquad (4)$$

Объект кручения T_{jk}^i аффинной связности выражается по формуле $T_{jk}^i = \Gamma_{[jk]}^i$ и удовлетворяет уравнениям $\Delta T_{\mathrm{jk}}^{\mathrm{i}} = T_{\mathrm{jkl}}^{\mathrm{i}} \omega^l$. Кручение выражается через тензор деформации по формуле

$$T_{jk}^i = \gamma_{[jk]}^i \qquad (5)$$

и не зависит от слоевых координат x_{jk}^i.

2. Кручение аффинной связности в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2

Рассмотрим дифференциальные уравнения (4) для двумерного многообразия X_2, то есть при $i, j, k, ... = 1, 2$. Выпишем систему дифференциальных уравнений на функции $\gamma_{12}^1, \gamma_{21}^1$ и $\gamma_{12}^2, \gamma_{21}^2$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\gamma_{12}^1}{\partial x_s^1} = (\gamma_{12}^2 - \gamma_{11}^1)\overset{*}{x}{}_2^s, \quad \frac{\partial\gamma_{21}^1}{\partial x_s^1} = (\gamma_{21}^2 - \gamma_{11}^1)\overset{*}{x}{}_2^s, \\
\frac{\partial\gamma_{12}^1}{\partial x_s^2} = -\gamma_{22}^1 \overset{*}{x}{}_1^s - \gamma_{12}^1 \overset{*}{x}{}_2^s, \quad \frac{\partial\gamma_{21}^1}{\partial x_s^2} = -\gamma_{21}^1 \overset{*}{x}{}_2^s - \gamma_{22}^1 \overset{*}{x}{}_1^s, \\
\frac{\partial\gamma_{12}^2}{\partial x_s^1} = -\gamma_{12}^2 \overset{*}{x}{}_1^s - \gamma_{11}^2 \overset{*}{x}{}_2^s, \quad \frac{\partial\gamma_{21}^2}{\partial x_s^1} = -\gamma_{21}^2 \overset{*}{x}{}_1^s - \gamma_{11}^2 \overset{*}{x}{}_2^s, \qquad (6) \\
\frac{\partial\gamma_{12}^2}{\partial x_s^2} = (\gamma_{12}^1 - \gamma_{22}^2)\overset{*}{x}{}_1^s, \quad \frac{\partial\gamma_{21}^2}{\partial x_s^2} = (\gamma_{21}^1 - \gamma_{22}^2)\overset{*}{x}{}_1^s,
\end{gathered}$$

Теорема 1. *Тензор кручения* T^i_{jk} $(i, j, k, ... = 1, 2)$ *аффинной связности, заданной в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием* X_2, *в общем случае имеет вид*

$$T^i_{12} = a^j \cdot \frac{x^i_j}{\Delta},$$

где $a^j = a^j(x^k)$, $\Delta = \det(x^i_j) = x^1_1 x^2_2 - x^2_1 x^1_2$.

Таким образом, две компоненты тензора кручения T^i_{jk} *существенно зависят от двух функций* a^j, *зависящих от базисных координат* x^k.

Замечание. Хотя связность Γ^i_{jk} задается в расслоении, но «слоевое» выражение $\frac{x^i_j}{\Delta}$ кручения T^i_{jk} не зависит от связности; от связности зависят только «базисные» коэффициенты $a^j(x^k)$.

Доказательство. Используя дифференциальные уравнения (6) для нахождения дифференциальных уравнений компонент $T^1_{12} = \frac{1}{2}(\gamma^1_{12} - \gamma^1_{21})$ и $T^2_{12} = \frac{1}{2}(\gamma^2_{12} - \gamma^2_{21})$ (5), получим

$$\frac{\partial T^1_{12}}{\partial x^1_s} = T^2_{12} \overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial T^2_{12}}{\partial x^1_s} = -T^2_{12} \overset{*}{x}{}^s_1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T^1_{12}}{\partial x^2_s} = -T^1_{12} \overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial T^2_{12}}{\partial x^2_s} = T^1_{12} \overset{*}{x}{}^s_1, \tag{8}$$

Из уравнений (7_2) и (8_1) найдем

$$T^1_{12} = \frac{F^1(x^1_1, x^1_2, x^k)}{\Delta}, \quad T^2_{12} = \frac{F^2(x^2_1, x^2_2, x^k)}{\Delta}, \tag{9}$$

где F^1, F^2 — некоторые функции, $\Delta = \det(x^i_j) = x^1_1 x^2_2 - x^2_1 x^1_2$, Подставляя ($9_1$) в ($7_1$), а ($9_2$) в ($8_2$), получим

$$\left(\frac{\partial F^1}{\partial x_1^1}\cdot\Delta - F^1 x_2^2\right)\cdot\frac{1}{\Delta^2} = \frac{F^2}{\Delta}\cdot\frac{-x_2^1}{\Delta},$$

$$\left(\frac{\partial F^2}{\partial x_1^2}\cdot\Delta + F^2 x_2^1\right)\cdot\frac{1}{\Delta^2} = \frac{F^1}{\Delta}\cdot\frac{x_2^2}{\Delta}, \qquad (10)$$

$$\left(\frac{\partial F^1}{\partial x_2^1}\cdot\Delta + F^1 x_1^2\right)\cdot\frac{1}{\Delta^2} = \frac{F^2}{\Delta}\cdot\frac{x_1^1}{\Delta},$$

$$\left(\frac{\partial F^2}{\partial x_2^2}\cdot\Delta - F^2 x_1^1\right)\cdot\frac{1}{\Delta^2} = \frac{F^1}{\Delta}\cdot\frac{-x_1^2}{\Delta}. \qquad (11)$$

Приравнивая результаты (10_1) и (10_2), а также (11_1) и (11_2), получим $\dfrac{\partial F^1}{\partial x_1^1} = \dfrac{\partial F^2}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial F^1}{\partial x_2^1} = \dfrac{\partial F^2}{\partial x_2^2}$, или более подробно

$$\frac{\partial F^1(x_1^1, x_2^1, x^k)}{\partial x_1^1} = \frac{\partial F^2(x_1^2, x_2^2, x^k)}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial F^1(x_1^1, x_2^1, x^k)}{\partial x_2^1} = \frac{\partial F^2(x_1^2, x_2^2, x^k)}{\partial x_2^2},$$

откуда

$$F^1 = a^1(x^k)\cdot x_1^1 + a^2(x^k)\cdot x_2^1,\ F^2 = a^1(x^k)\cdot x_1^2 + a^2(x^k)\cdot x_2^2,$$

или более компактно

$$F^i = a^j(x^k)\cdot x_j^i.$$

Тогда согласно (9) имеем выражения

$$T_{12}^{1} = \frac{a^{1}(x^{k}) \cdot x_{1}^{1} + a^{2}(x^{k}) \cdot x_{2}^{1}}{\Delta},$$

$$T_{12}^{1} = \frac{a^{1}(x^{k}) \cdot x_{1}^{2} + a^{2}(x^{k}) \cdot x_{2}^{2}}{\Delta}.$$

Замечание. Если коэффициенты $a^{j}(x^{k})$ равны нулю, то кручение нулевое, $T_{12}^{i} = 0$, и связность симметрична.

3. Кручение аффинной связности в расслоении линейных реперов над трехмерным многообразием X_3

Рассматривая дифференциальные уравнения (4) при $i, j, k, ... = 1, 2, 3$ и решая систему уравнений, аналогичную системе (7, 8), можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Тензор кручения* T_{jk}^{i} $(i, j, k, ... = 1, 2, 3)$ *аффинной связности, заданной в расслоении линейных реперов над трехмерным многообразием* X_3*, в общем случае имеет вид*

$$T_{12}^{i} = \frac{1}{\varDelta}\left(a^{j} x_{j}^{i} \cdot b^{k} x_{k}^{3} + c^{j} x_{j}^{3}\right),$$

$$T_{31}^{i} = \frac{1}{\varDelta}\left(a^{j} x_{j}^{i} \cdot b^{k} x_{k}^{2} + c^{j} x_{j}^{2}\right),$$

$$T_{23}^{i} = \frac{1}{\varDelta}\left(a^{j} x_{j}^{i} \cdot b^{k} x_{k}^{1} + c^{j} x_{j}^{1}\right),$$

где $\varDelta = \det(x_{j}^{i})$, $a^{j} = a^{j}(x^{k})$, $b^{k} = b^{k}(x^{l})$, $c^{j} = c^{j}(x^{k})$.

Таким образом, все девять компонент тензора кручения T_{jk}^{i} *существенно зависят от девяти функций* a^{j}, b^{k}, c^{j}, *зависящих от базисных координат* x^{k}.

4. Аффинная связность в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2

Уравнения (4) для компонент объекта деформации

$$\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^p_q)$$

имеют вид

$$\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^1_s} = -2\gamma^2_{11} \overset{*}{x}{}^s_1, \quad \frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^2_s} = (\gamma^1_{11} - \gamma^2_{21} - \gamma^2_{12}) \overset{*}{x}{}^s_1 + \gamma^2_{11} \overset{*}{x}{}^s_2, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \gamma^1_{22}}{\partial x^2_s} = -2\gamma^1_{22} \overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial \gamma^1_{22}}{\partial x^1_s} = \gamma^1_{22} \overset{*}{x}{}^s_1 + (\gamma^2_{22} - \gamma^1_{12} - \gamma^1_{21}) \overset{*}{x}{}^s_2, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial x^1_s} = -\gamma^1_{11} \overset{*}{x}{}^s_1 + \gamma^2_{11} \overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial x^2_s} = -(\gamma^1_{12} + \gamma^1_{21}) \overset{*}{x}{}^s_1, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \gamma^2_{22}}{\partial x^2_s} = -\gamma^2_{22} \overset{*}{x}{}^s_2 + \gamma^1_{22} \overset{*}{x}{}^s_1, \quad \frac{\partial \gamma^2_{22}}{\partial x^1_s} = -(\gamma^2_{12} + \gamma^2_{21}) \overset{*}{x}{}^s_2, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \gamma^1_{12}}{\partial x^2_s} = -\gamma^1_{12} \overset{*}{x}{}^s_2 - \gamma^1_{22} \overset{*}{x}{}^s_1, \quad \frac{\partial \gamma^1_{12}}{\partial x^1_s} = (\gamma^2_{12} - \gamma^1_{11}) \overset{*}{x}{}^s_2, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \gamma^1_{21}}{\partial x^1_s} = -\gamma^1_{21} \overset{*}{x}{}^s_2 - \gamma^1_{22} \overset{*}{x}{}^s_1, \quad \frac{\partial \gamma^1_{21}}{\partial x^1_s} = (\gamma^2_{21} - \gamma^1_{11}) \overset{*}{x}{}^s_2, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \gamma^2_{12}}{\partial x^1_s} = -\gamma^2_{12} \overset{*}{x}{}^s_1 - \gamma^2_{11} \overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial \gamma^2_{12}}{\partial x^2_s} = (\gamma^1_{12} - \gamma^2_{22}) \overset{*}{x}{}^s_1, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \gamma^2_{21}}{\partial x^1_s} = -\gamma^2_{21} \overset{*}{x}{}^s_1 - \gamma^2_{11} \overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial \gamma^2_{21}}{\partial x^2_s} = (\gamma^1_{21} - \gamma^2_{22}) \overset{*}{x}{}^s_1, \tag{19}$$

Теорема 3. *Компоненты аффинной связности* Γ^i_{jk} $(i, j, k, ... = 1, 2)$ *в общем случае имеют вид* $\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - x^i_{jk}$, *где*

$$\gamma^1_{22} = \frac{1}{\Delta^2} F^1_{22}(x^1_s, x^i), \ \gamma^2_{11} = \frac{1}{\Delta^2} G^2_{11}(x^2_s, x^i),$$

$$\gamma^2_{22} = \frac{F^2_{22}}{\Delta} + \frac{F^1_{22}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^2_2}{x^1_2}, \ \gamma^1_{11} = \frac{G^1_{11}}{\Delta} + \frac{G^2_{11}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^1_2}{x^2_2},$$

$$\gamma^1_{12} = \frac{F^1_{12}}{\Delta} - \frac{F^1_{22}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^2_2}{x^1_2}, \ \gamma^2_{12} = \frac{G^2_{12}}{\Delta} - \frac{G^2_{11}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^1_2}{x^2_2},$$

$$\gamma^1_{21} = \frac{F^1_{21}}{\Delta} - \frac{F^1_{22}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^2_2}{x^1_2}, \ \gamma^2_{21} = \frac{G^2_{21}}{\Delta} - \frac{G^2_{11}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^1_2}{x^2_2},$$

$$\Delta = \det(x^i_j) = x^1_1 x^2_2 - x^2_1 x^1_2.$$

Функции

$$F = \{ F^1_{22},\ F^2_{22},\ F^1_{12},\ F^1_{21} \} = \{ F^1_{22}(x^1_s, x^i),\ F^2_{22}(x^1_s, x^i),$$

$$F^1_{12}(x^1_s, x^i),\ F^1_{21}(x^1_s, x^i) \} \text{ и } G = \{ G^2_{11},\ G^1_{11},\ G^2_{12},\ G^2_{21} \} =$$

$$= \{ G^2_{11}(x^2_s, x^i),\ G^1_{11}(x^2_s, x^i),\ G^2_{12}(x^2_s, x^i),\ G^2_{21}(x^2_s, x^i) \}$$

удовлетворяют соотношениям

$$x^2_1 \frac{\partial G^2_{11}}{\partial x^2_1} + x^2_2 \frac{\partial G^2_{11}}{\partial x^2_2} = 3G^2_{11}, \ x^1_1 \frac{\partial F^1_{22}}{\partial x^1_1} + x^1_2 \frac{\partial F^1_{22}}{\partial x^1_2} = 3F^1_{22}, \qquad (20)$$

$$x^2_1 \frac{\partial G^1_{11}}{\partial x^2_1} + x^2_2 \frac{\partial G^1_{11}}{\partial x^2_2} = G^1_{11}, \ x^1_1 \frac{\partial F^2_{22}}{\partial x^1_1} + x^1_2 \frac{\partial F^2_{22}}{\partial x^1_2} = F^2_{22}, \qquad (21)$$

$$x^1_1 \frac{\partial F^1_{12}}{\partial x^1_1} + x^1_2 \frac{\partial F^1_{12}}{\partial x^1_2} = F^1_{12}, \ x^1_1 \frac{\partial F^1_{21}}{\partial x^1_1} + x^1_2 \frac{\partial F^1_{21}}{\partial x^1_2} = F^1_{21}, \qquad (22)$$

$$x_1^2 \frac{\partial G_{12}^2}{\partial x_1^2} + x_2^2 \frac{\partial G_{12}^2}{\partial x_2^2} = G_{12}^2, \; x_1^2 \frac{\partial G_{21}^2}{\partial x_1^2} + x_2^2 \frac{\partial G_{21}^2}{\partial x_2^2} = G_{21}^2. \quad (23)$$

$$F_{12}^1 - F_{21}^1 = a^1 x_1^1 + a^2 x_2^1, \; G_{12}^2 - G_{21}^2 = a^1 x_1^2 + a^2 x_2^2. \quad (24)$$

Функции $a^i = a^i(x^j)$ *зависят от базисных координат.*

Доказательство. Из уравнений (12_1—19_1) можно найти общий вид компонент тензора деформации $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i(x^l, x_q^p)$:

$$\gamma_{11}^2 = \frac{1}{\Delta^2} G_{11}^2(x_s^2, x^i),$$

$$\gamma_{22}^1 = \frac{1}{\Delta^2} F_{22}^1(x_s^1, x^i),$$

$$\gamma_{11}^1 = \frac{G_{11}^1(x_s^2, x^i)}{\Delta} + \frac{G_{11}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2},$$

$$\gamma_{22}^2 = \frac{F_{22}^2(x_s^1, x^i)}{\Delta} + \frac{F_{22}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1},$$

$$\gamma_{12}^1 = \frac{F_{12}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta} - \frac{F_{22}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1},$$

$$\gamma_{21}^1 = \frac{F_{21}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta} - \frac{F_{22}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1},$$

$$\gamma_{12}^2 = \frac{G_{12}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta} - \frac{G_{11}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2},$$

$$\gamma_{21}^2 = \frac{G_{21}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta} - \frac{G_{11}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2}.$$

Теперь найдем вид функций, входящих в эти выражения.

Из уравнений (12_2) следует

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_{11}^2}{\partial x_1^2} = (G_{11}^1 - G_{21}^2 - G_{12}^2)x_2^2, \\ \dfrac{\partial G_{11}^2}{\partial x_2^2} = \dfrac{3G_{11}^2}{x_2^2} - (G_{11}^1 - G_{21}^2 - G_{12}^2)x_1^2, \end{cases} \Rightarrow x_1^2 \dfrac{\partial G_{11}^2}{\partial x_1^2} + x_2^2 \dfrac{\partial G_{11}^2}{\partial x_2^2} = 3G_{11}^2.$$

Тогда $U\left(\dfrac{G_{11}^2}{(x_1^2)^3}; \dfrac{x_2^2}{x_1^2}\right) = 0$, при этом

$$G_{11}^1 - G_{21}^2 - G_{12}^2 = \frac{1}{x_2^2}\frac{\partial G_{11}^2}{\partial x_1^2},\ G_{11}^1 - G_{21}^2 - G_{12}^2 = \frac{3G_{11}^2}{x_1^2 x_2^2} - \frac{1}{x_1^2}\frac{\partial G_{11}^2}{\partial x_2^2},$$

Из уравнений (13_2) следует

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{22}^1}{\partial x_1^1} = -(F_{22}^2 - F_{12}^1 - F_{21}^1)x_2^1, \\ \dfrac{\partial F_{22}^1}{\partial x_2^1} = \dfrac{3F_{22}^1}{x_2^1} - (F_{22}^2 - F_{12}^1 - F_{21}^1)x_1^1, \end{cases} \Rightarrow x_1^1 \dfrac{\partial F_{22}^1}{\partial x_1^1} + x_2^1 \dfrac{\partial F_{22}^1}{\partial x_2^1} = 3F_{22}^1.$$

Тогда $V\left(\dfrac{F_{22}^1}{(x_1^1)^3}; \dfrac{x_2^1}{x_1^1}\right) = 0$, при этом

$$F_{22}^2 - F_{12}^1 - F_{21}^1 = -\frac{1}{x_2^1}\frac{\partial F_{22}^1}{\partial x_1^1},$$

$$F_{22}^2 - F_{12}^1 - F_{21}^1 = -\frac{3F_{22}^1}{x_1^1 x_2^1} + \frac{1}{x_1^1}\frac{\partial F_{22}^1}{\partial x_2^1},$$

Из уравнений (14_2—19_2) следует (21—23). Кроме того,

$$\frac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_1^1} = \frac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_2^1} = \frac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_2^2},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_1^1} = \dfrac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_1^2}, \\ \dfrac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_2^1} = \dfrac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_2^2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{12}^1 - F_{21}^1 = a^1 x_1^1 + a^2 x_2^1, \\ G_{12}^2 - G_{21}^2 = a^1 x_1^2 + a^2 x_2^2, \end{cases}$$

откуда следует (24).

Следствие. *Равенства* $G_{11}^2(x_s^2, x^i) = 0$, $F_{22}^1(x_s^1, x^i) = 0$ *выделяют класс аффинных связностей* $\Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - x_{jk}^i$ $(i, j, k, ... = 1, 2)$ *с тензором деформации следующего вида:*

$$\gamma_{22}^1 = 0, \ \gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\gamma_{12}^1 = \frac{a^i + \xi^i}{2\Delta} x_i^1, \ \gamma_{21}^1 = \frac{-a^i + \xi^i}{2\Delta} x_i^1, \ \gamma_{22}^2 = \gamma_{12}^1 + \gamma_{21}^1 = \frac{\xi^i}{\Delta} x_i^1,$$

$$\gamma_{12}^2 = \frac{a^i - \xi^i}{2\Delta} x_i^2, \ \gamma_{21}^2 = \frac{-a^i - \xi^i}{2\Delta} x_i^2, \ \gamma_{11}^1 = \gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 = -\frac{\xi^i}{\Delta} x_i^2,$$

где $\Delta = \det(x_j^i) = x_1^1 x_2^2 - x_1^2 x_2^1$; $a^i = a^i(x^j)$, $\xi^i = \xi^i(x^j)$.

Замечание. Хотя все связности Γ_{jk}^i этого класса задаются в расслоении, но их «слоевое» выражение $\dfrac{x_j^i}{\Delta}$ не зависит от связности; от связности зависят только «базисные» коэффициенты $a^i(x^j)$, $\xi^i(x^j)$. Таким образом, компоненты Γ_{jk}^i существенно зависят от функций a^i, ξ^i, выражающихся через базисные координаты x^j.

Список литературы

1. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

2. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—246.

3. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

4. *Полякова К. В.* Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 114—128.

5. *Полякова К. В.* Тангенциальнозначные формы 2-го порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 105, №1. С. 84—94.

6. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, №2. С. 279—290.

7. *Рыбников А. К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. №1. С. 73—80.

8. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 179—187.

9. *Belova O. O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Mathematics. 2021. Vol. 9, №7. doi: https://doi.org/10.3390/math9070782.

K. V. Polyakova[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-9

About the torsion tensor of an affine connection on two-dimensional and three-dimensional manifolds

Submitted on May 21, 2021

The basis for this study of affine connections in linear frame bundle over a smooth manifold is the structure equations of the bundle. An affine connection is given in this bundle by the Laptev — Lumiste method. The differential equations are written for components of the deformation tensor from an affine connection to the symmetrical canonical one. The expressions for the components of the torsion tensor for two-dimensional and three-dimensional manifolds were found.

For a two-dimensional manifold, the affine torsion is a fraction, in the numerator there is a linear combination of two fiber coordinates which coefficients are two functions depending on the base coordinates (the coordinates on the base), and in the denominator there is the determinant composed of the fiber coordinates (the coordinates in a fiber). For a three-dimensional manifold, the arbitrariness of the numerator is determined by nine functions depending on the base coordinates.

Keywords: two-dimensional manifold, three-dimensional manifold, linear frame bundle, structure equations, base and fiber coordinates, affine torsion.

References

1. *Akivis, M.A.:* Multidimensional differential geometry. Kalinin (1977).

2. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. *J. Soviet Math*. **14**:6, 1573—1719 (1980).

3. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. *Tr. Geom. Sem*., **1**, 139—189 (1966).

4. *Polyakova, K.V.:* Special affine connection of the 1st and 2nd orders. *DGMF*. Kaliningrad. **46**, 114—128 (2015).

5. *Polyakova, K.V.:* Second-Order Tangent-Valued Forms. *Math. Notes*, **105**:1, 71—79 (2019).

6. *Rybnikov, A.K.:* Affine connections of second order. *Math. Notes*, **29**:2, 143—149 (1981).

7. *Rybnikov, A.K.:* Second-order generalized affine connections. *Soviet Math*. (Izv. Vuzov), **27**:1, 84—93 (1983).

8. *Shevchenko, Yu. I.:* Laptev and Lumiste methods for the specifcation of a connection in a principal bundle. *DGMF*. Kaliningrad. **37**, 179—187 (2006).

9. *Belova, O.O.:* Generalized affine connections associated with the space of centered planes. *Mathematics*, **9** (7), 782 (2021). https://doi.org/10.3390/math9070782.