УДК 514.75

Н.В. Малаховский
(Калининградский государственный университет)

КОНИКИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ИЗОГОНАЛЬНЫМ И ИЗОТОМИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ПЛОСКОСТИ

Методом комплексных чисел в планиметрии [1] найдены аналитические выражения мнимых изогональной и изотомической коник, изученных в работе [2]. Показано, что ряд известных вписанно-описанных действительных коник треугольника являются взаимными относительно мнимых изогональной и изотомической коник. Корреляционные преобразования плоскости, порождённые изогональной и изотомической кониками представлены конечной последовательностью преобразований плоскости относительно действительных геометрических образов. Доказано, что множество всех преобразований плоскости, порождённых композицией корреляционного преобразования точки в её поляру относительно изогональной коники, и корреляционного преобразования полученной поляры в точку относительно изотомической коники, образует группу, в которой единицей является преобразование, порождаемое равносторонним треугольником.

Рассмотрим два инволютивных преобразования плоскости: изогональное I и изотомическое T сопряжения плоскости. Относительно заданного невырожденного треугольника ABC, вписанного в единичную окружность, комплексные координаты образов Q и прообразов P этих преобразований связаны соответственно соотношениями

$$I \equiv p+q+\sigma_3\overline{pq}-\sigma_1=0,$$
$$T \equiv 3I+\overline{I}\sigma_2+\sigma_1\left(p\overline{q}+\overline{p}q-\sigma_1\left(\overline{p}+\overline{q}\right)-\overline{\sigma}_1(p+q)+1+|\sigma_1|^2\right)=0,$$

где $\sigma_1=a+b+c, \sigma_2=ab+bc+ca, \sigma_3=abc$ – симметрические многочлены относительно чисел a,b,c – комплексных координат вершин треугольника ABC. Пусть ABC – произвольный невырожденный треугольник, а P – произвольная точка плоскости. Обозначим $A_p=AP\cap BC$, $B_p=BP\cap CA, C_p=CP\cap AB$. Точки $L=AB\cap A_pB_p$, $M=BC\cap B_pC_p, N=CA\cap C_pA_p$ лежат на одной прямой, называемой гармонической полярой [2] (в дальнейшем – поляра), точки P относительно треугольника ABC. При этом точка P называется гармоническим полюсом [2] (в дальнейшем – полюс) прямой MNP относительно треугольника ABC. Изогональной, соответственно изотомической, полярой точки P относительно треугольника ABC, вписанного в единичную окружность $|z|=1$, называется гармоническая поляра точки Q, изогонально, соответственно изотомически, сопряжённая точке P относительно треугольника ABC [2]. Уравнения этих гармонических поляр имеют вид

$$\left(3\overline{p}-2\overline{\sigma}_1+p\overline{\sigma}_2\right)z+\left(3p-2\sigma_1+\overline{p}\sigma_2\right)\overline{z}-2\sigma_1\overline{p}-2\overline{\sigma}_1 p+\left|\sigma_1\right|^2+3, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&+\left(\left(\left|\sigma_1\right|^2-9\right)\overline{p}+2\left(\overline{\sigma}_1^2-3\overline{\sigma}_2\right)p+\overline{\sigma}_1\left(3-\left|\sigma_1\right|^2\right)+2\sigma_1\overline{\sigma}_2\right)z+\\&+\left(\left(\left|\sigma_1\right|^2-9\right)p+2\left(\sigma_1^2-3\sigma_2\right)\overline{p}+\sigma_1\left(3-\left|\sigma_1\right|^2\right)+2\overline{\sigma}_1\sigma_2\right)\overline{z}+\\&+\left(\overline{\sigma}_1\left(3-\left|\sigma_1\right|^2\right)+2\sigma_1\overline{\sigma}_2\right)p+\left(\sigma_1\left(3-\left|\sigma_1\right|^2\right)+2\overline{\sigma}_1\sigma_2\right)\overline{p}+\left|\sigma_1^2-2\sigma_2\right|^2-9=0.\end{aligned} \tag{2}$$

Переходя от полярной формы к квадратичной путём замены p на z в уравнениях (1) и (2), получим уравнения изогональной и изотомической коник:

$$\overline{\sigma}_2 z^2+6z\overline{z}+\sigma_2\overline{z}^2-4\overline{\sigma}_1 z-4\sigma_1\overline{z}+\left|\sigma_1\right|^2+3=0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\left(3\overline{\sigma}_2-\overline{\sigma}_1^2\right)z^2+\left(9-\left|\sigma_1\right|^2\right)z\overline{z}+\left(3\sigma_2-\sigma_1^2\right)\overline{z}^2+\left(\overline{\sigma}_1\left(\left|\sigma_1\right|^2-3\right)-2\sigma_1\overline{\sigma}_2\right)z+\\&+\left(\sigma_1\left(\left|\sigma_1\right|^2-3\right)-2\overline{\sigma}_1\sigma_2\right)\overline{z}-\frac{1}{2}\left|\sigma_1^2-2\sigma_2\right|^2+\frac{9}{2}=0.\end{aligned} \tag{4}$$

Коники (3) и (4) являются мнимыми кониками, существующими на комплексной проективной плоскости и имеющими действительные центры и действительные оси. Действительно, в случае коники (3), осуществляя композицию параллельного переноса начала координат на вектор

$$l=2\frac{\sigma_2\overline{\sigma}_1-3\sigma_1}{\left|\sigma_1\right|^2-9}, \tag{5}$$

где $L(l)$ – точка Лемуана треугольника ABC, и вращения плоскости вокруг начала координат, определяемого формулой $z=\sqrt[4]{\dfrac{\sigma_2}{\overline{\sigma}_2}}z'$, приведём уравнение коники (3) к виду

$$|\sigma_1|z^2+6z\bar{z}+|\sigma_1|\bar{z}^2+\frac{\bar{\sigma}_3^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)}{|\sigma_1|^2-9}=0.$$

Переходя к декартовым координатам x, y, получим каноническое уравнение коники:

$$(3+|\sigma_1|)x^2+(3-|\sigma_1|)y^2+\frac{(\bar{\sigma}_3(a-b)(b-c)(c-a))^2}{2(|\sigma_1|^2-9)}=0. \qquad (6)$$

Заметим, что в случае невырожденного треугольника ABC, т. е. когда $a\neq b\neq c\neq 0 \Rightarrow |\sigma_1|<3$, число $\bar{\sigma}_3(a-b)(b-c)(c-a)$ является чисто мнимым, а значит, его квадрат является отрицательным числом. В этом случае

$$(3+|\sigma_1|)x^2+(3-|\sigma_1|)y^2=\frac{(\bar{\sigma}_3(a-b)(b-c)(c-a))^2}{2(9-|\sigma_1|^2)}<0,$$

откуда следует, что не существует ни одной пары действительных чисел (x,y), удовлетворяющих уравнению (6), что и означает, что коника (3) является мнимой с действительными осями и центром в точке Лемуана (5). Оси мнимой изогональной коники и её центр совпадают соответственно с осями и центром коники, касающейся треугольника в основаниях его высот, так называемой ортоконики [2]. Действительно, уравнение ортоконики имеет вид:

$$\begin{aligned}&\bar{\sigma}_2z^2+6z\bar{z}+\sigma_2\bar{z}^2-2(\sigma_1\bar{\sigma}_2-\bar{\sigma}_1)z-2(\bar{\sigma}_1\sigma_2-\sigma_1)\bar{z}\\&+4\left(\sigma_1^2\bar{\sigma}_2-\bar{\sigma}_1^2\sigma_2\right)+3-10|\sigma_1|^2-|\sigma_1|^4=0,\end{aligned} \qquad (7)$$

откуда следует, в силу совпадения коэффициентов при $z\bar{z}$, z^2 и $\bar{z}^2$, совпадение асимптотических направлений, а следовательно, и параллельность осей коник. Кроме того, коника (7) также имеет центр в точке Лемуана треугольника ABC. Проводя аналогичные рассуждения в случае коники (4) и осуществляя последовательно параллельный перенос начала координат в точку G – пересечение медиан треугольника ABC с координатой $g=\frac{1}{3}(a+b+c)$ – и вращение плоскости вокруг начала координат $z=\sqrt[4]{\frac{\sigma_1^2-3\sigma_2}{\bar{\sigma}_1^2-3\bar{\sigma}_2}}z'$, приведём её к каноническому виду:

$$\left(1+\frac{2\left|\sigma_1^2-3\sigma_2\right|}{\left|\sigma_1\right|^2-9}\right)x^2+\left(1-\frac{2\left|\sigma_1^2-3\sigma_2\right|}{\left|\sigma_1\right|^2-9}\right)y^2+\frac{\left(\overline{\sigma}_3(a-b)(b-c)(c-a)\right)^2}{6\left(\left|\sigma_1\right|^2-9\right)}=0,$$

причём, в силу $\left|\sigma_1\right|<3$,

$$-1<\frac{-2\left|\sigma_1\right|}{\left|\sigma_1\right|+3}=\frac{-2\left|\sigma_1\right|\left(\left|\sigma_1\right|-3\right)}{\left(\left|\sigma_1\right|-3\right)\left(\left|\sigma_1\right|+3\right)}\le\frac{2\left|\sigma_1^2-3\sigma_2\right|}{\left|\sigma_1\right|^2-9}\le\frac{2\left|\sigma_1\right|\left(\left|\sigma_1\right|+3\right)}{\left(\left|\sigma_1\right|-3\right)\left(\left|\sigma_1\right|+3\right)}=$$
$$=\frac{2\left|\sigma_1\right|}{\left|\sigma_1\right|-3}<0.$$

Следовательно, коника (4) является мнимой с действительными осями и центром в точке G – пересечение медиан треугольника ABC. Оси мнимой изотомической коники и её центр совпадают соответственно с осями и центром вписанного в треугольник эллипса Штейнера [2]:

$$\left(3\overline{\sigma}_2-\overline{\sigma}_1^2\right)z^2+\left(9-\left|\sigma_1\right|^2\right)z\overline{z}+\left(3\sigma_2-\sigma_1^2\right)\overline{z}^2+\left(\overline{\sigma}_1\left(\left|\sigma_1\right|^2-3\right)-2\overline{\sigma}_2\sigma_1\right)z+$$
$$+\left(\sigma_1\left(\left|\sigma_1\right|^2-3\right)-2\sigma_2\overline{\sigma}_1\right)z-\frac{1}{4}\left(3-\left|\sigma_1\right|^2\right)^2+\left|\sigma_1\right|^2=0. \qquad (8)$$

Действительно, сравнивая уравнения эллипса Штейнера и изотомической коники, убеждаемся в совпадении коэффициентов при $z\overline{z}$, z^2 и $\overline{z}^2$, а следовательно, и совпадении асимптотических направлений и параллельности осей коник. Кроме того, коника (8) также имеет центр в точке пересечения медиан треугольника ABC. Несмотря на то, что коники (3) и (4) являются мнимыми, каждая точка P плоскости имеет действительную поляру относительно этих коник. В частности, если точка P описывает единичную окружность, её поляра относительно коники (3) огибает вписанный в треугольник ABC эллипс Штейнера (8), касающийся сторон треугольника ABC в их серединах. Если же точка P пробегает описанный эллипс Штейнера треугольника ABC:

$$\left(3\overline{\sigma}_2-\overline{\sigma}_1^2\right)z^2+\left(9-\left|\sigma_1\right|^2\right)z\overline{z}+\left(3\sigma_2-\sigma_1^2\right)\overline{z}^2+\left(\overline{\sigma}_1\left(\left|\sigma_1\right|^2-3\right)-2\overline{\sigma}_2\sigma_1\right)z+$$
$$\left(\sigma_1\left(\left|\sigma_1\right|^2-3\right)-2\sigma_2\overline{\sigma}_1\right)\overline{z}+7\left|\sigma_1\right|^2-9-\sigma_1^2\overline{\sigma}_2-\overline{\sigma}_1^2\sigma_2=0,$$

её поляра также огибает вписанный в треугольник ABC эллипс Штейнера. Следовательно, описанная окружность треугольника ABC и вписанный в него эллипс Штейнера являются взаимными кониками относительно изогональной коники (3), и аналогично описанный около треугольника эллипс Штейнера и вписанный в него эллипс Штейнера являются взаимными кониками относительно изотомической коники (4). Действительно, находя поляры середин сторон треугольника ABC относительно изогональной, соответственно изотомической коники, получим уравнения прямых *BC, CA, AB:*

$$z+bc\bar{z}-b-c=0, z+ca\bar{z}-c-a=1, z+ab\bar{z}-a-b=0\ ,$$

касающихся в серединах сторон $BC, CA, AB,$ вписанного в треугольник ABC эллипса Штейнера. Наоборот, находя поляры середин сторон треугольника ABC относительно изогональной, соответственно изотомической, коники получим прямые, касающиеся описанной окружности, соответственно описанного эллипса, треугольника ABC в точках A, B, C. Отсюда, в силу произвольности треугольника ABC, и следует доказательство.

Корреляционные преобразования плоскости, порождённые мнимыми изогональной, соответственно изотомической, кониками представляются конечной последовательностью коллинеационных и корреляционных преобразований плоскости [2]. Действительно, корреляционное преобразование точки P в прямую (3) является последовательным выполнением 1) параллельного переноса начала координат на вектор σ_1-2p; 2) изотомического преобразования плоскости; 3) изогонального преобразования плоскости; 4) коррелятивного преобразования относительно единичной окружности.

Корреляционное преобразование точки P в прямую (4) является последовательным выполнением параллельного переноса начала координат на вектор σ_1-2p и коррелятивного преобразования относительно описанного эллипса Штейнера.

Рассмотрим преобразование $P=\varphi(Q)$ плоскости, порождённое композицией корреляционного преобразование точки P в поляру (6) относительно изотомической коники и корреляционного преобразования поляры (4) в точку Q относительно изогональной коники. Это преобразование φ определяется формулой

$$p = \frac{3q + \sigma_2 \overline{q} + \sigma_1 - \sigma_2 \overline{\sigma_1}}{\overline{\sigma_1} q + \sigma_1 \overline{q} + 3 - |\sigma_1|^2}, \tag{9}$$

а обратное преобразование $Q = \phi(P)$ – формулой

$$q = \frac{\left(\sigma_1^2 \overline{\sigma}_2 - 4|\sigma_1|^2 + 9\right)p + \left(\sigma_1^2 - 3\sigma_2\right)\overline{p} + 4\sigma_2 \overline{\sigma}_1 - 3\sigma_1 - \sigma_1|\sigma_1|^2}{\left(\sigma_1 \overline{\sigma}_2 - 3\overline{\sigma}_1\right)p + \left(\overline{\sigma}_1 \sigma_2 - 3\sigma_1\right)\overline{p} + 9 - |\sigma_1|^2}. \tag{10}$$

Заметим, что только в случае равностороннего треугольника ABC $q \equiv p$, т. е. φ является тождественным преобразованием плоскости. Действительно, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной p в тождестве

$$\overline{\sigma_1} p^2 + \sigma_1 |p|^2 + \left(3 - |\sigma_1|^2\right)p \equiv 3p + \sigma_2 \overline{p} + \sigma_1 - \sigma_2 \overline{\sigma_1},$$

получим $\sigma_1 = 0$. Пусть $\varPhi$ – множество всех преобразований φ. Так как произведение любых двух преобразований множества $\varPhi$ является преобразованием того же множества $\varPhi$ и обратное преобразование к любому преобразованию множества $\varPhi$ также является преобразованием множества $\varPhi$, то это множество преобразований $\varPhi$ образует группу, единицей которой является преобразование, порождаемое равносторонним треугольником. Неподвижные точки преобразования $P = \varphi(Q)$ определяются системой уравнений $p = \varphi(p), \overline{p} = \overline{\varphi(p)}$, решениями которой являются значения $p = a, p = b, p = c$, т. е. неподвижными точками преобразования φ являются только вершины треугольника ABC. Из формулы (9), в частности, следует, что коллинеация φ тогда и только тогда является аффинным преобразованием плоскости, когда изогональное преобразование плоскости совпадает с её изотомическим преобразованием, т. е. в случае равностороннего треугольника ABC. Аналогично – в случае коллинеации ϕ (10). Коллинеации φ и ϕ не являются инволютивными преобразованиями плоскости.

Список литературы

1. *Малаховский Н.В.* Метод комплексных чисел в планиметрии. Калининград, 1996.

2. *Cyril F. Parry*. The Isogonal Tripolar Conic // Forum Geometricorum. 2001. Vol. 1. P. 33 – 42.

N. Malakhovsky

CONICS INDUCED ISOGONAL AND ISOTOMIC CONVERSIONS OF A PLANE

By method of complex numbers in planimetry [1] the analytical expressions imaginary isogonal and isotomic of conics studied in [2] are given. It is shown, that a series known inscribed-described of real conics of a triangle are mutual concerning imaginary isogonal and isotomic of conics. The correlation conversions of a planes induced isogonal and isotomic by conics are shown by final sequence of conversions of a plane concerning real geometrical images. It is proved, that the set of all conversions of the plane induced by composition of correlation conversion of a point in its polar concerning an isogonal conic and correlation conversion of an obtained polar in the point concerning isotomic of a conic is form group, in which one unit is the conversion induced by an equilateral triangle.

УДК 514.76

О.А. Монахова
(Пензенский государственный педагогический институт)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА СВЯЗНОСТИ НА РАССЛОЕНИИ ДВАЖДЫ КОВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРОВ

Получены условия, которым должна удовлетворять линейная связность на базе, для того чтобы расслоение дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта было пространством с локально-симметрической связностью и пространством рекуррентной кривизны.

Пусть M_n – гладкое многообразие класса C^∞, ∇ – линейная связность на нем, $T_2^0(M_n)$ – расслоение дважды ковариантных тензоров над M_n. Произвольная локальная карта (U, x^i) на базе M_n порождает карту $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$, $i, j, k = 1, \ldots, n$ на $T_2^0(M_n)$, где π: $T_2^0(M_n) \to M_n$ – каноническая проекция, x^i, x_{jk} – координатные функции на расслоении.