ОТ РЕДАКТОРА

В данном сборнике публикуются работы, в которых исследуются многообразия фигур и пар фигур в трехмерном и многомерном пространствах. Основная часть работ выполнена на кафедре геометрии Калининградского университета в 1970 году. Как и в предыдущие годы, преподаватели и аспиранты кафедры, а также студенты, специализирующиеся по геометрии, работали над проблемой "Дифференциальная геометрия многообразий фигур".

В статье В.С.М а л а х о в с к о г о рассматриваются оснащенные многообразия фигур в n-мерном однородном пространстве и устанавливается их связь с пфаффовыми подмногообразиями.

Ю.И.П о п о в исследовал в n-мерном проективном пространстве P_n вырожденные гиперполосы ранга $r=\frac{m}{2}$.

Б.А.А н д р е е в и В.И.О в ч и н н и к о в изучали локально биективные дифференцируемые отображения N-мерного проективного пространства P_N в многообразия некоторых типов фигур и пар фигур пространства P_n.

И.М.П о х и л а исследовал в P_n пары многообразий квадратичных элементов, в частности, некоторые классы расслояемых пар конгруэнций коник в P_3.

В.А.Г р и ц е н к о рассмотрел в P_n многообразия квадратичных элементов, гиперплоскости которых образуют семейство меньшей размерности.

Г.Н.Ш е в ч е н к о изучал в многомерном аффинном пространстве многообразия центральных квадратичных гиперцилиндров.

В работе Г.Л.С в е ш н и к о в о й рассмотрены конгруэнции коник с тремя вырождающимися фокальными поверхностями.

Г.П.Т к а ч и Ф.А. Л и п а т о в а исследовали конгруэнции некоторых типов пар фигур в эквиаффинном и аффинном пространствах.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
вып 2 1971

М А Л А Х О В С К И Й В.С.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОСНАЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР.

В n-мерном однородном пространстве рассматривается m-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ фигур F с заданным оснащающим объектом φ_k. Такое многообразие является многообразием $\mathfrak{M}^*_m$ фигур F^*, где F^* — пара фигур, образованная фигурой F и фигурой φ_k, порожденной объектом φ_k.

В трехмерном евклидовом, эквиаффинном и проективном пространствах оснащенные точечные и линейчатые многообразия исследовались, главным образом, Р.Н.Щербаковым и его учениками [4] и румынскими геометрами [9]. Чешские геометры [10] рассматривали инволютивные оснащенные многообразия некоторых классов фигур в n-мерном проективном пространстве. В [2] даны общие принципы построения многообразий индуцирующих фигур методом продолжения и охватов Г.Ф.Лаптева [1]. Г.Георгиев и И.Попа [8] предложили другой подход к исследованию многообразий индуцирующих фигур ("эквипараметрических многообразий").

В данной работе рассматриваются общие вопросы дифференциальной геометрии оснащенных многообразий фигур.

§ I. Поля фундаментальных объектов многообразия фигур.

Рассмотрим n-мерное однородное пространство E_n с фундаментальной r-членной группой Ли G, определяемой линейно независимыми формами Пфаффа $\omega^s(u^p, du^p)$ и структурными постоянными C^s_{pq} $(p,q,s=1,\dots,r)$. Пусть $F(a^J)$ $(J,K=1,2,\dots,N)$ — фигура пространства E_n ранга N [3]. Если формы Пфаффа

$$\Omega^J \equiv da^J - f^J_s(a)\,\omega^s(u,du) \tag{1.1}$$

являются левыми частями уравнений стационарности фигуры F, то система дифференциальных уравнений многообразия $\mathfrak{M}_m$ фигур F запишется в виде:

$$\Omega^a = \lambda^a_i \Omega^i \quad (i,j,k=1,2,\dots,m;\quad a=m+1,\dots,N). \tag{1.2}$$

Продолжая систему (I.2), получим последовательность фундаментальных объектов многообразия $\mathfrak{M}_m$ [I]:

$$\Gamma_\nu = \{a^J;\ \lambda^a_{i_1},\ \lambda^a_{i_1 i_2},\ \dots,\ \lambda^a_{i_1 i_2 \dots i_\nu}\} \quad (\nu=1,2,\dots). \tag{1.3}$$

Обозначим символом δ дифференцирование по групповым параметрам при фиксированном образующем элементе F (вторичным параметрам), а буквами $\pi^s(u,\delta u)$ — значения форм $\omega^s(u,du)$ при фиксированном F. Формы Пфаффа, обращающиеся в нуль при $\Omega^1=\dots=\Omega^m=0$, назовем главными.

Мы будем рассматривать многообразия общего вида, для которых существует основной объект Γ_{ν_0}, (см. [I], стр. 347). Фундаментальный Объект Γ_{ν_0+1} определяет многообразие $\mathfrak{M}_m$ с точностью до преобразований группы G. Репер R_{ν_0} порядка ν_0, где ν_0 — порядок основного объекта, является каноническим репером многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Если многообразие $\mathfrak{M}_m$ отнесено к реперу R_{ν_0} ([I], стр. 352), то все вторичные параметры фиксированы. Если же многообразие отнесено к реперу R_ν порядка $\nu<\nu_0$, то выделяется нетривиальная стационарная подгруппа H_{r_ν}, группы G, размерность которой совпадает с числом свободных вторичных параметров.

О п р е д е л е н и е I.I. Функция $J(a^K; \lambda^a_{i_1},\dots,\lambda^a_{i_1\dots i_\nu})$, не равная тождественно постоянной, но сохраняющая свои значения при произвольных преобразованиях подгруппы H_{r_ν}, называется инвариантом порядка ν многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Предметом дифференциальной геометрии многообразия $\mathfrak{M}_m$ является (см. [I], стр. 349) изучение геометрических объектов многообразия $\mathfrak{M}_m$, охватываемых его фундаментальными полями.

Важную роль играет, в частности, нахождение инвариантов многообразия $\mathfrak{M}_m$ различных порядков, выделение (желательно в репере более низкого порядка) ассоциированных с $\mathfrak{M}_m$ геометрических образов и исследование подклассов многообразий $\mathfrak{M}_m$, характеризуемых различными свойствами ассоциированных образов.

§ 2. Относительно инвариантная система форм Пфаффа на многообразии.

Зададим натуральное число k $(1\le k<m)$ и рассмотрим на многообразии $\mathfrak{M}_m$ систему форм Пфаффа

$$\Theta^\alpha = A^\alpha_i(a,u)\,\Omega^i \quad (\alpha,\beta=k+1,\dots,m). \tag{2.1}$$

О п р е д е л е н и е 2.I. Система форм (2.I) называется относительно инвариантной порядка ν, если в репере R_ν порядка ν имеют место соотношения

$$\delta\Theta^\alpha = B^\alpha_\beta(a,u,\delta u)\,\Theta^\beta. \tag{2.2}$$

Т е о р е м а 2.I. Система форм

$$\vartheta^a = \lambda^a_i \Omega^i - \Omega^a, \tag{2.3}$$

являющихся левыми частями дифференциальных уравнений многообразия $\mathfrak{M}_m$, относительно инвариантна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$\Omega^J_K = -\frac{\partial f^J_s}{\partial a^K}\,\omega^s(u,du),\quad \Pi^J_K = -\frac{\partial f^J_s}{\partial a^K}\,\pi^s(u,\delta u). \tag{2.4}$$

Имеем (см. [3], стр. 183):

$$\mathcal{D}\Omega^\gamma = \Omega^\varkappa \wedge \Omega^\gamma_\varkappa \tag{2.5}$$

откуда следует, что

$$\delta\Omega^\gamma = -\Pi^\gamma_\varkappa \Omega^\varkappa . \tag{2.6}$$

Продолжая систему (1.2), получим (см. [3], стр. 188):

$$\delta\lambda^a_i = \lambda^a_j \left(\Pi^j_i + \lambda^b_i \Pi^j_b\right) - \lambda^b_i \Pi^a_b - \Pi^a_i . \tag{2.7}$$

Используя (2.6) и (2.7), находим:

$$\delta\vartheta^a = \left(\Pi^a_b - \lambda^a_j \Pi^j_b\right)\vartheta^b \tag{2.8}$$

откуда следует, что ϑ^a — относительно инвариантная система форм.

Т е о р е м а 2.2. Если система уравнений Пфаффа

$$\theta^\alpha = 0 \tag{2.9}$$

вполне интегрируема, то формы θ^α образуют относительно инвариантную систему.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае полной интегрируемости системы (2.9) внешние дифференциалы $\mathcal{D}\theta^\alpha$ обращаются в нуль как алгебраическое следствие системы. Имеем:

$$\mathcal{D}\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta , \tag{2.10}$$

где $\theta^\alpha_\beta = \theta^\alpha_\beta(a,u,du)$ — некоторые формы Пфаффа.

В силу (2.1)

$$\theta^\alpha(\delta) = 0 . \tag{2.11}$$

Учитывая (2.10) и (2.11), находим:

$$\delta\theta^\alpha = B^\alpha_\beta \theta^\beta , \tag{2.12}$$

где

$$B^\alpha_\beta = \theta^\alpha_\beta(a,u,\delta u) . \tag{2.13}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Для $K=1$ справедливо обратное утверждение. Если же $K>1$, то относительно инвариантная система форм не является в общем случае вполне интегрируемой.

Действительно, дополним формы θ^α частью форм Ω^i до полной системы m линейно независимых форм. Пусть, например,

$$\Omega^1 \wedge \ldots \wedge \Omega^K \wedge \theta^{K+1} \wedge \theta^{K+2} \wedge \ldots \wedge \theta^m \neq 0 . \tag{2.14}$$

Тогда

$$\Omega^\alpha = m^\alpha_\beta \theta^\beta + n^\alpha_\xi \Omega^\xi \qquad (\xi = 1,\ldots,K) . \tag{2.15}$$

Из относительной инвариантности системы форм θ^α следует, что

$$(\mathcal{D}\theta^\alpha)_{\Omega^\xi = 0} \equiv 0 \pmod{\theta^{K+1},\ldots,\theta^m} , \tag{2.16}$$

откуда

$$\mathcal{D}\theta^\alpha = \theta^\alpha_\beta \wedge \theta^\beta + a^\alpha_{\xi\eta} \Omega^\eta \wedge \Omega^\xi \tag{2.17}$$

причем, в общем случае, среди величин $a^\alpha_{\xi\eta}$ есть отличные от нуля. Если же $K=1$, то $\xi=\eta=1$ и дополнительных членов, нарушающих полную интегрируемость системы форм θ^α, не будет.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что система форм (2.1) линейно независима. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\det\left(A^\alpha_\beta\right) \neq 0 . \tag{2.18}$$

Обозначим буквами $\overset{*}{A}{}^\alpha_\beta$ приведенные миноры элементов A^α_β матрицы (A^α_β). Имеем:

$$\overset{*}{A}{}^\gamma_\alpha A^\beta_\gamma = \delta^\beta_\alpha , \quad A^\gamma_\alpha \overset{*}{A}{}^\beta_\gamma = \delta^\beta_\alpha . \tag{2.19}$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Система форм Пфаффа

$$\tilde\theta^\alpha \equiv \tilde A^\alpha_\xi(a,u)\Omega^\xi + \Omega^\alpha \qquad (\xi=1,\ldots,K;\ \alpha=K+1,\ldots,m) \tag{2.20}$$

называется приведенной. Две системы форм

$$\theta^\alpha \equiv A^\alpha_i(a,u)\Omega^i , \quad \bar\theta^\alpha = \bar A^\alpha_i(a,u)\Omega^i \tag{2.21}$$

называются эквивалентными, если каждая из них линейно выражается через другую.

Очевидно, введенное понятие эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением R эквивалентности во множестве $\overset{\circ}{\Theta}$ форм Пфаффа вида (2.1). Фактор-множество $\widetilde{\Theta}=\Theta/R$ изоморфно множеству приведенных систем форм.

Пусть (2.1) и (2.20) - две эквивалентные системы форм. Тогда

$$\widetilde{\theta}^\alpha = \overset{*}{A}{}^\alpha_\gamma\, \theta^\gamma. \qquad (2.22)$$

Отсюда следует, что всякую систему уравнений Пфаффа $\theta^\alpha=0$ можно заменить эквивалентной ей (т.е. имеющей одни и те же интегральные многообразия) приведенной системой уравнений $\bar{\theta}^\alpha=0$. Так как в дальнейшем мы будем иметь дело только с системами уравнений Пфаффа, а не с системами форм, то, не умаляя общности, можно всегда предполагать, что система форм (2.1) является приведенной, т.е. что

$$A^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta . \qquad (2.23)$$

§ 3. Оснащенное многообразие фигур.

Т е о р е м а 3.1. Система форм Пфаффа

$$\theta^\alpha \equiv A^\alpha_\xi(a,u)\,\Omega^\xi+\Omega^\alpha \qquad (\xi,\eta=1,\dots,k;\ \alpha,\beta=k+1,\dots,m) \qquad (3.1)$$

тогда и только тогда относительно инвариантна, когда величины A^α_ξ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\Delta A^\alpha_\xi = A^\alpha_{\xi i}\,\Omega^i, \qquad (3.2)$$

где

$$\Delta A^\alpha_\xi = dA^\alpha_\xi - A^\alpha_\eta\Omega^\eta_\xi + A^\beta_\xi A^\alpha_\eta(\Omega^\eta_\beta+\lambda^b_\beta\Omega^\eta_b) - \lambda^b_\xi(\Omega^\alpha_b+A^\alpha_\eta\Omega^\eta_b)+A^\beta_\xi(\Omega^\alpha_\beta+\lambda^b_\beta\Omega^\alpha_b)-\Omega^\alpha_\xi . \qquad (3.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.6) с учетом (1.2) и (3.1) находим :

$$\delta\Omega^\xi = -(\Pi^\xi_\alpha+\Pi^\xi_b\lambda^b_\alpha)\theta^\alpha + (A^\alpha_\eta\Pi^\xi_\alpha - \Pi^\xi_\eta + A^\alpha_\eta\lambda^b_\alpha\Pi^\xi_b - \lambda^b_\eta\Pi^\xi_b)\Omega^\eta, \qquad (3.4)$$

$$\delta\Omega^\alpha = -(\Pi^\alpha_\beta+\Pi^\alpha_b\lambda^b_\beta)\theta^\beta + (A^\beta_\xi\Pi^\alpha_\beta + A^\beta_\xi\lambda^b_\beta\Pi^\alpha_b - \lambda^b_\xi\Pi^\alpha_b - \Pi^\alpha_\xi)\Omega^\xi .$$

Используя (3.4), получим :

$$\delta\theta^\alpha = -\{A^\alpha_\xi(\Pi^\xi_\beta+\lambda^b_\beta\Pi^\xi_b)+\lambda^b_\beta\Pi^\alpha_b+\Pi^\alpha_\beta\}\theta^\beta + \mathring{\Delta}A^\alpha_\xi\,\Omega^\xi, \qquad (3.5)$$

где нолик над формой Пфаффа ΔA^α_ξ означает значение формы при фиксированной фигуре F.

Из (3.5) следует, что система форм θ^α тогда и только тогда относительно инвариантна, когда $\mathring{\Delta}A^\alpha_\xi=0$, т.е. когда формы ΔA^α_ξ являются главными. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Система форм Пфаффа Ω^α тогда и только тогда относительно инвариантна, когда вторичные параметры $\pi^s(u,\delta u)$ связаны соотношениями:

$$\Pi^\alpha_\xi+\lambda^b_\xi\Pi^\alpha_b=0 . \qquad (3.6)$$

Действительно, полагая в (3.2) все величины A^α_ξ равными нулю, убеждаемся, что формы Пфаффа $\Omega^\alpha_\xi+\lambda^b_\xi\Omega^\alpha_b$ станут главными, т.е. что имеют место уравнения (3.6). Наоборот, если (3.6) заданы, то из (1.2) и (2.5) следует, что

$$\delta\Omega^\alpha = -(\Pi^\alpha_\beta+\lambda^b_\beta\Pi^\alpha_b)\Omega^\beta . \qquad (3.7)$$

Т е о р е м а 3.2. Система величин $\{a^J,\lambda^a_\xi\}$ тогда и только тогда является подобъектом фундаментального объекта $\Gamma_1=\{a^J,\lambda^a_i\}$, когда система форм Ω^α относительно инвариантна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя уравнения (2.7), находим:

$$\delta\lambda^a_\xi=\lambda^a_\eta(\Pi^\eta_\xi+\lambda^b_\xi\Pi^\eta_b)-\lambda^b_\xi\Pi^a_b-\Pi^a_\xi+\lambda^a_\alpha(\Pi^\alpha_\xi+\lambda^b_\xi\Pi^\alpha_b). \qquad (3.8)$$

Сравнивая (3.6) с (3.8) и используя следствие теоремы 3.1, убеждаемся в справедливости теоремы 3.2.

З а м е ч а н и е. В работе [8], ошибочно утверждается (см. замечание 1 работы [6], что системы величин $\{a^J,\lambda^a_\xi\}$ (в наших обозначениях) всегда являются подобъектами фундаментального объекта $\{a^J,\lambda^a_i\}$, тогда как на самом деле, как установлено выше, это имеет место только при выполнении условий (3.6). Используя этот факт, авторы работы [8] приходят к ошибочному утверждению, что всегда система уравнений Пфаффа $\Omega^\alpha=0$ определяет распределение Δ_κ. Эта ошибка фигурирует и в §2 работы [8].

О п р е д е л е н и е 3.1. Геометрический объект

$$\varphi_\kappa = \{a^\gamma, \lambda^a_i, A^\alpha_\xi\}, \qquad (3.9)$$

определенный системами уравнений (1.2) и (3.2), называется касательно оснащающим объектом многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Оснащенным многообразием $\mathfrak{M}_m$, или многообразием $\mathfrak{M}^*_m$, называется многообразие, на котором задано поле касательно оснащающего объекта φ_κ.

Касательно оснащающий объект φ_κ определяет индуцирующую фигуру, которую мы тоже будем обозначать буквой φ_κ. Системы величин $\{a^\gamma\}$ и $\{a^\gamma, \lambda^a_i\}$ определяют подобъекты объекта φ_κ.

Многообразие $\mathfrak{M}^*_m$ фигур φ_κ определяется системой уравнений

$$\Omega^a = \lambda^a_i \Omega^i, \quad \Delta A^\alpha_\xi = A^\alpha_{\xi i} \Omega^i. \qquad (3.10)$$

Так как в систему дифференциальных уравнений фундаментального объекта Γ_γ (см. (1.3)) не входят величины A^α_ξ, то при исследовании многообразия $\mathfrak{M}^*_m$ можно осуществлять частичные продолжения любых порядков подсистемы (1.2) системы (3.10), не затрагивая уравнений (3.2).

В связи с этим, наряду с обычным процессом канонизации репер с помощью последовательных продолжений всей системы (3.10), можн канонизировать репер, используя уравнения (3.2) и последовательн продолжения системы (1.2)

О п р е д е л е н и е 3.2. Будем говорить, что многообразие $\mathfrak{M}^*_m$ отнесено к реперу индуцированного порядка ν, если многооб разие $\mathfrak{M}_m$ оказывается отнесенным к реперу порядка ν, а величи ны A^α_ξ в процессе канонизации не участвуют.

О п р е д е л е н и е 3.3. Квазиканоническим репером многообразия $\mathfrak{M}^*_m$ будем называть репер R индуцированного порядка $\tilde{\nu}_o$, относительно которого только $\kappa(m-\kappa)$ вторичных параметров остаются свободными, причем уравнения $\overset{\circ}{\Delta} A^\alpha_\xi = 0$ в процессе канонизации не использовались. Репер R^* называется индуцированно каноническим репером многообразия $\mathfrak{M}^*_m$, если он получен из квазиканонического репера R фиксацией оставшихся $\kappa(m-\kappa)$ вторичных параметров с помощью уравнений $\overset{\circ}{\Delta} A^\alpha_\xi = 0$.

Из определения следует, что индуцированно канонический репер многообразия $\mathfrak{M}^*_m$ является репером порядка $\tilde{\nu}_o$ многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Если ν_o —порядок основного объекта многообразия $\mathfrak{M}_m$, ν^*_o—порядок основного объекта многообразия $\mathfrak{M}^*_m$, то в общем случае

$$\nu^*_o < \tilde{\nu}_o < \nu_o. \qquad (3.11)$$

§ 4. Пфаффовы подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}_m$.

О п р е д е л е н и е 4.1. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\theta^\alpha \equiv A^\alpha_\xi(a,u)\Omega^\xi + \Omega^\alpha = 0 \quad (\xi,\eta = 1,\dots,\kappa;\ \alpha,\beta = \kappa+1,\dots,m). \ (4.1)$$

Пфаффовым подмногообразием многообразия $\mathfrak{M}_m$ или подмногообразием Ψ_κ называется совокупность интегральных кривых системы (4.1), принадлежащих многообразию $\mathfrak{M}_m$. Подмногообразие Ψ_κ называется голономным, если система (4.1) вполне интегрируема.

Т е о р е м а 4.1. Система дифференциальных уравнений (4.1) тогда и только тогда определяет подмногообразие Ψ_κ, когда система форм θ^α относительно инвариантна.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть θ^α –относительно инвариантная система форм, т.е.

$$\delta\theta^\alpha = B^\alpha_\beta(a,u,\delta u)\,\theta^\beta. \qquad (4.2)$$

Обозначим буквами u^γ независимые первичные параметры фигуры F. Зафиксируем все вторичные параметры. Тогда (4.1) образуют систему линейно независимых уравнений относительно величин u^γ и их дифференциалов. Как известно, для такой системы существуют одномерные решения. Задав, например, u^{ξ} ($\xi = 1, 2, \dots, \kappa$) функциями от одного аргумента

$$u^{\xi} = f^{\xi}(t) \qquad (4.3)$$

и подставив (4.3) в (4.1), получим систему $N-\kappa$ обыкновенных дифференциальных уравнений, которая определит $(N-\kappa)$-параметрическое семейство интегральных кривых: $u^{\mathcal{J}} = F^{\mathcal{J}}(t, c_1, \dots, c_{N-\kappa})$. (4.4)

При инфинитезимальном изменении вторичных параметров формы θ^{α} преобразуются в формы

$$\tilde{\theta}^{\alpha} = \theta^{\alpha} + \delta\theta^{\alpha}, \qquad (4.5)$$

которые, в силу (4.2), имеют вид :

$$\tilde{\theta}^{\alpha} = (\delta^{\alpha}_{\beta} + B^{\alpha}_{\beta})\,\theta^{\beta}. \qquad (4.6)$$

Из (4.6) вытекает, что вдоль всякой интегральной кривой (4.4) все формы $\tilde{\theta}^{\alpha}$ обращаются в нуль. Следовательно, интегральная кривая относительно инвариантной системы (4.1) является интегральной кривой системы $\tilde{\theta}^{\alpha} = 0$, получающейся из (4.1) инфинитезимальным изменением вторичных параметров. Таким образом, относительно инвариантная система уравнений (4.1) действительно определяет Ψ_κ.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть система (4.1) определяет подмногообразие Ψ_κ. Пользуясь формулой (3.5) и обозначением (4.5), получим :

$$\tilde{\theta}^{\alpha} = -\{A^{\alpha}_{\xi}(\Pi^{\xi}_{\beta} + \lambda^{\theta}_{\beta}\Pi^{\xi}_{\theta}) + \lambda^{\theta}_{\beta}\Pi^{\alpha}_{\theta} + \Pi^{\alpha}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\}\theta^{\beta} + \mathring{\Delta}A^{\alpha}_{\xi}\Omega^{\xi}. \qquad (4.7)$$

Так как под многообразие Ψ_κ инвариантно относительно инфинитезимального изменения вторичных параметров, то

$$\mathring{\Delta}A^{\alpha}_{\xi} = 0. \qquad (4.8)$$

Эти условия (см. теорему 2.1) характеризуют относительную инвариантность системы форм θ^{α}.

Сравнивая теоремы 2.1 и 4.1, мы приходим к следующему выводу:

Т е о р е м а 4.2. Для задания на многообразии $\mathfrak{M}_m$ распределения Δ_κ необходимо и достаточно задание подмногообразия Ψ_κ.

Многообразия $\mathfrak{M}^*_m$ часто получают заданием на исходном многообразии $\mathfrak{M}_m$ подмногообразия Ψ_κ. Практически удобно задать в репере многообразия $\mathfrak{M}_m$ произвольного порядка $\nu \le \nu_0$ приведенную систему форм $\theta^{\alpha} \equiv A^{\alpha}_{\xi}\Omega^{\xi} + \Omega^{\alpha}$ и, потребовав (при $\nu < \nu_0$) её относительную инвариантность, получить систему (3.2).

Присоединив эту систему к системе (1.2), получают систему дифференциальных уравнений многообразия $\mathfrak{M}^*_m$.

З а м е ч а н и е . Если многообразие $\mathfrak{M}_m$ отнесено к каноническому реперу, то вторичные параметры отсутствуют и система уравнений (4.1) определит многообразие Ψ_κ Р.Н.Щербакова (см. [5], стр. 188).

§ 5. Примеры оснащенных многообразий.

Рассмотрим несколько простейших примеров оснащенных точечных и линейчатых многообразий в трехмерном пространстве.

п 1. Оснащенная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве.

Отнесем поверхность S к реперу R первого порядка, направив орт $\bar{e}_3$ по нормали к поверхности. Дифференциальные уравнения поверхности S запишутся в виде:

$$\omega^3 = 0, \ \omega^3_1 = a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega^3_2 = b\omega^1 + c\omega^2. \qquad (5.1)$$

Зададим на S произвольное подмногообразие Ψ_1 при помощи относительно инвариантного уравнения

$$\theta \equiv \lambda\omega^1 + \omega^2 = 0. \qquad (5.2)$$

Из относительной инвариантности формы θ вытекает уравнение:

$$d\lambda - (1+\lambda^2)\,\omega^2_1 = \lambda_i\,\omega^i \qquad (i = 1, 2). \qquad (5.3)$$

Система уравнений (5.1), (5.3) определяет оснащенную поверхность S^*. Репер R индуцированного первого порядка является в этом случае квазиканоническим репером поверхности S^* (см. определение 3.2).

Для получения индуцированно канонического репера поверхности S^* приводим величину λ к нулю. Подмногообразие Ψ_1 становится координатным подмногообразием $\omega^2=0$. Деривационные формулы индуцированно канонического репера оснащенной поверхности запишутся в виде: $d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i$, $d\bar{e}_3=-(a\omega^1+b\omega^2)\bar{e}_1-(b\omega^1+c\omega^2)\bar{e}_2$,

$$d\bar{e}_1=\lambda_i\omega^i\bar{e}_2+(a\omega^1+b\omega^2)\bar{e}_3,\ d\bar{e}_2=-\lambda_i\omega^i\bar{e}_1+(b\omega^1+c\omega^2)\bar{e}_3. \qquad (5.4)$$

Замыкая уравнения

$$\omega^3=0,\ \omega_1^3=a\omega^1+b\omega^2,\ \omega_2^3=b\omega^1+c\omega^2,\ \omega_1^2=\lambda_i\omega^i, \qquad (5.5)$$

убеждаемся, что оснащенная поверхность S^* определяется с произволом двух функций двух аргументов.

З а м е ч а н и е. Задание подмногообразия Ψ_1 на поверхности S эквивалентно заданию семейства линий на поверхности. При последней канонизации мы полагали $\lambda^2+1\neq 0$, т.е. исключен случай, когда Ψ_1 является семейством линий нулевой длины.

п 2. Оснащенная прямолинейная конгруэнция в трехмерном евклидовом пространстве.

Помещая вершину A репера на луч конгруэнции K и направляя орт $\bar{e}_3$ по лучу, запишем систему дифференциальных уравнений конгруэнции K в виде:

$$\omega^1=a\omega_1^3+b\omega_2^3,\quad \omega^2=b^1\omega_1^3+c\omega_2^3. \qquad (5.6)$$

Задав произвольно подмногообразие Ψ_1 уравнением

$$\lambda\omega_1^3+\omega_2^3=0, \qquad (5.7)$$

получим систему дифференциальных уравнений оснащенной конгруэнции K, состоящую из (5.I5) и уравнения

$$\Delta\lambda\equiv d\lambda-(1+\lambda^2)\omega_1^2=\lambda^i\omega_i^3 \qquad (i=1,2). \qquad (5.8)$$

Продолжив один раз уравнения (5,6) и фиксируя только один вторичный параметр $(c=-a)$, получим квазиканонический репер оснащенной конгруэнции K^*. Фиксируя оставшийся вторичный параметр с помощью уравнения (5.8), построим индуцированно канонический репер конгруэнции K^*. Деривационные формулы такого репера совпадают с формулами (2.I) работы [6].

п 3. Оснащенный линейчатый комплекс в трехмерном эквиаффинном пространстве.

Поместив вершину A репера на луч комплекса и направив вектор $\bar{e}_3$ по лучу, запишем уравнения комплекса в виде

$$\omega^2=a_1\omega^1+a_2\omega_3^1+a_3\omega_3^2. \qquad (5.9)$$

Так как комплекс-трехмерное линейчатое многообразие, то для него можно строить два типа оснащенных комплексов: комплекс K_1^* (с помощью задания на K подмногообразия Ψ_1) и комплекс K_2^* (с помощью задания на K подмногообразия Ψ_2). Так как оснащения с помощью Ψ_1 являлись предметом рассмотрения в предыдущих пунктах этого параграфа, то мы зададим оснащение подмногообразием Ψ_2. Задав подмногообразие Ψ_2 уравнением

$$\theta\equiv\omega^1+\lambda_i\omega_3^i=0 \qquad (i,j=1,2), \qquad (5.10)$$

получим (в силу относительной инвариантности формы θ) систему дифференциальных уравнений оснащенного комплекса K_2^* в виде:

$$\omega^2=a_1\omega^1+a_2\omega_3^1+a_3\omega_3^2,\quad \Delta\lambda_i=\lambda_{ij}\omega_3^j, \qquad (5.11)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\Delta\lambda_1&=d\lambda_1+\lambda_1(\omega_3^3-2\omega_1^1)+(\lambda_1a_1-a_2)\omega_2^1-\lambda_2\omega_1^2+\omega^3,\\ \Delta\lambda_2&=d\lambda_2+2\lambda_2\omega_3^3+(\lambda_2a_1-a_3-\lambda_1)\omega_2^1.\end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

Осуществляя последовательные продолжения уравнения (5.9) и канонизируя, как в [7], построим квазиканонический репер. Дифференциальные уравнения оснащенного комплекса K_2^* в этом репере состоят из уравнений 25,26-28,34-38,39 работы [7] и уравнений

$$\Delta\lambda_i=\lambda_{ij}\omega_3^j, \qquad (5.13)$$

причем выполнены конечные соотношения (33) и (4I) работы [7].

Фиксируя последние два вторичных параметра с помощью уравнений (5.I3) построим индуцированно канонический репер комплекса прямых. Формы ω^3, ω_2^1 стали главными .

Литература

I. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского математического общества. ГИТТЛ, М, I953, 2, 275-383.

2. Малаховский В.С., О многообразиях алгебраических фигур. Геометрический сборник, вып.5 (Труды Томского ун-та, I8I) I965, 5-I4.

3. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР, т.2, I969, I79-206.

4. Щербаков Р.Н., Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, I965, 265-32I.

5. Щербаков Р.Н., О методе репеража подмногообразий. Геометрический сборник, 3 (Труды Томского ун-та, I68), I963, 5-II.

6. Щербаков Р.Н., Репер линейчатой поверхности, принадлежащий данной конгруэнции. Уч. зап. Бурятского пединститута, вып.5, I954, 6I-89.

7. Щербаков Р.Н., Эквиаффинный репер комплекса прямых. Геометрический сб., I (Труды Томского ун-та, I60), I962, 70-8I.

8. Gh. Gheorghiev et I. Popa. Sur la méthode du „repérage" et la théorie des variétés „équiparamétriques". C.R Acad. Sc. Paris, t.263, p. 911-914, 1966.

9. Gh. Gheorghiev et I. Popa, Analele, şt. Univ., Iasi, 8, 1962, p. 425-431.

10. K. Svoboda, V. Havel, I. Kolař, La méthode du repérage des systemes de sous variétes. Comm. Math. Univ. Carolinae, 5,4, 1964, 183-201.