УДК 514.76

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
arturkuleshov@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-1

О конструкции канонической формы на расслоении реперов

Дано подробное изложение конструкции канонической формы на расслоении реперов произвольного порядка над гладким многообразием. В частности, показана корректность построения одного изоморфизма векторных пространств, играющего ключевую роль в данной конструкции, а также описано действие этого изоморфизма.

Ключевые слова: гладкое многообразие, струя, расслоение реперов, каноническая форма

Введение. Каноническая форма на расслоении реперов широко используется при изучении дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях (см., напр., [2; 3; 5—7]). Подходы, применяемые различными авторами для описания ее конструкции, весьма разнообразны, в связи с чем возникает необходимость их сопоставления и выработки единого подхода. Изложение конструкции канонической формы, выполненное в подобном ключе, — такова наша цель. В связи с этим особое внимание уделяется восстановлению техниче-

---

Поступила в редакцию 14.05.2023 г.

ских деталей, пропущенных в вышеуказанных работах. В частности, ключевую роль в конструкции канонической формы играет изоморфизм Φ_θ (см. п. 2), и данная статья в основном посвящена проверке корректности построения этого изоморфизма, а также описанию его действия.

На протяжении всей работы индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k, l, m, j_1, j_2, \ldots = \overline{1, n}.$$

1. Расслоения реперов высших порядков. В этом пункте излагаются необходимые предварительные сведения. Терминология и обозначения взяты из [3] и [7]. Пусть M — n-мерное гладкое многообразие. Репер порядка p (p-репер) θ на M в точке $x \in M$ — это p-струя $j_0^p f$ всякого диффеоморфизма f окрестностей точек $0 \in \mathbb{R}^n$ и $x \in M$, такого, что $x = f(0)$. В свою очередь, отображение f является представителем репера θ. На множестве $H^p(M)$ всех p-реперов на M имеет место проекция $\pi_p\colon H^p(M) \to M$, $j_0^p f \mapsto f(0)$. Локальными координатами данного p-репера относительно карты (U, x^i) на M, где $x^i\colon U \to \mathbb{R}^n$ — координатные функции, считаются значения в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ частных производных до p-го порядка включительно от функций $x^i \circ f$, задающих координатное представление отображения f в данной карте. Таким образом, каждая локальная карта (U, x^i) на М определяет на множестве $H^p(M)$ локальную карту с областью $\pi_p^{-1}(U)$ и координатными функциями

$$(x^i, x^i_{j_1}, x^i_{j_1 j_2}, \ldots, x^i_{j_1 j_2 \ldots j_p}),$$

заданными на $\pi_p^{-1}(U)$ по правилу

$$x^i(\theta) = x^i\left(\pi_p(\theta)\right),$$

$$x^i_{j_1}(\theta) = \left.\frac{\partial\left(x^i \circ f\right)}{\partial t^{j_1}}\right|_0, \; x^i_{j_1 j_2}(\theta) = \left.\frac{\partial^2\left(x^i \circ f\right)}{\partial t^{j_1} t^{j_2}}\right|_0, \; \dots ,$$

$$x^i_{j_1 j_2 \dots j_p}(\theta) = \left.\frac{\partial^p\left(x^i \circ f\right)}{\partial t^{j_1} \partial t^{j_2} \dots \partial t^{j_p}}\right|_0, \; 1 \le j_1 \le \; j_2 \le \dots \le j_p \le n,$$

где $(t^1, t^2, \dots, t^n)$ — стандартные координаты на $\mathbb{R}^n$. Удобно, однако, разрешить любую перестановку индексов $j_1, j_2, \dots, j_p$, что с учетом равенства смешанных частных производных приводит к симметрии координат $x^i_{j_1 j_2}, \dots, x^i_{j_1 j_2 \dots j_p}$ по всем нижним индексам. Построенные таким образом карты наделяют множество $H^p(M)$ всех p-реперов на M структурой гладкого локально тривиального расслоения с канонической проекцией π_k и базой M, причем

$$\dim H^p(M) = nC^n_{n+p}.$$

Если в качестве M взять $\mathbb{R}^n$ со стандартными координатами, то вышеописанная конструкция приводит к глобальной карте на $H^p(\mathbb{R}^n)$. Соответствующий набор координатных функций обозначим через

$$(u^i, u^i_{j_1}, u^i_{j_1 j_2}, \dots, u^i_{j_1 j_2 \dots j_p}).$$

Пусть D^p_n — дифференциальная группа порядка p, то есть группа Ли, образованная всевозможными p-реперами на $\mathbb{R}^n$ в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ относительно композиции p-струй. Заметим, что $D^p_n \subset H^p(\mathbb{R}^n)$, причем D^p_n выделяется уравнениями $u^i = 0$, $i = \overline{1, n}$. Тогда на D^p_n глобально заданы координаты $(u^i_j, u^i_{jk}, \dots, u^i_{j_1 j_2 \dots j_p})$. Единица группы D^p_n определяется как $e = j^p_0(id_{\mathbb{R}^n})$, а обратный элемент к $\xi = j^p_0 s$ — как p-струя обратного отображения: $\xi^{-1} = j^p_0(s^{-1})$. На $H^p(M)$ определено правое действие группы D^p_n по закону композиции струй:

$$R_\xi : \theta \mapsto \theta \circ \xi = \tilde{\theta}, \; \theta \in H^p(M), \; \xi \in D^p_n.$$

Данное действие является свободным и транзитивным на слоях расслоения $H^p(M)$.

В качестве примера приведем координатное представление данного действия при $p = 3$:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}^i_j = x^i_k u^k_j,\ \tilde{x}^i_{jk} = x^i_m u^m_{jk} + x^i_{pq} u^p_j u^q_k, \\ \tilde{x}^i_{jkl} = x^i_m u^m_{jkl} + 3x^i_{pq} u^p_{(jk} u^q_{l)} + x^i_{pqr} u^p_j u^q_k u^r_l \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где $(x^i,\ x^i_j,\ x^i_{jk},\ x^i_{jkl})$, $(\tilde{x}^i,\ \tilde{x}^i_j,\ \tilde{x}^i_{jk},\ \tilde{x}^i_{jkl})$, $(u^i_j, u^i_{jk}, u^i_{jkl})$ — координаты реперов θ, $\tilde{\theta}$ и струи ξ соответственно.

Таким образом, $H^p(M)$ наделено структурой главного расслоения с базой M, структурной группой D^p_n и канонической проекцией $\pi^p\colon H^p(M) \to M$.

Так как каждый p-репер определяет последовательность реперов всех низших порядков, то для любых p и q, таких, что $p > q$, определен гомоморфизм главных расслоений

$$\pi^p_q\colon H^p(M) \to H^q(M),\ j^p_0 f \mapsto j^q_0 f.$$

Всякое гладкое отображение $\varphi\colon M_1 \to M_2$ гладких многообразий M_1 и M_2 порождает гомоморфизм расслоений реперов

$$\varphi^p\colon H^p(M_1) \to H^p(M_2),\ j^p_0 f \mapsto j^p_0(\varphi \circ f),$$

называемый p-ым продолжением отображения φ. Если φ — диффеоморфизм, то φ^p — изоморфизм главных расслоений.

Главное расслоение $H^p(\mathbb{R}^n)$ изоморфно $\mathbb{R}^n \times D^p_n$, то есть является тривиальным. В самом деле, благодаря наличию глобального сечения

$$\sigma^p\colon \mathbb{R}^n \to H^p(\mathbb{R}^n),\ u \mapsto j^p_0(t_u),$$

где $t_u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — трансляция на элемент $u \in \mathbb{R}^n$, существует изоморфизм главных расслоений $\mathbb{R}^n \times D^p_n$ на $H^p(\mathbb{R}^n)$, задаваемый по формуле

$$(u, \xi) \mapsto \sigma^p(u) \circ \xi,\ u \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in D^p_n.$$

Тогда касательное пространство $T_eH^p(M)$ представляется в виде прямой суммы

$$T_eH^p(M) \cong T_0(im\,\sigma^p) \oplus T_eD_n^p,$$

причем $T_0(im\,\sigma^p)$ отождествляется с $T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ посредством изоморфизма $d_0\sigma^p$, а $T_eD_n^p$ — с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_n^p$ группы Ли D_n^p. Таким образом,

$$T_eH^p(M) \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_n^p. \tag{2}$$

2. Каноническая форма. Согласно [7], *каноническая форма* Θ на расслоении $H^{p+1}(M)$ — это векторнозначная дифференциальная 1-форма

$$\Theta\colon T\big(H^{p+1}(M)\big) \to \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_n^p,$$

определяемая следующим образом. Пусть $X \in T_\theta\big(H^{p+1}(M)\big)$, где $\theta = j_0^{p+1}\varphi \in H^{p+1}(M)$, положим $\underline{\theta} = \pi_p^{p+1}(\theta)$ и заметим, что $d\pi_p^{p+1}(X) \in T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big)$. Далее рассмотрим дифференциал продолжения φ^p отображения φ в точке $e \in H^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\Phi_\theta = d_e\varphi^p\colon T_eH^p(M) \to T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big). \tag{3}$$

Заметим, что поскольку φ — локальный диффеоморфизм, Φ_θ является изоморфизмом векторных пространств, а потому определено обратное отображение

$$\Phi_\theta^{-1}\colon T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big) \to T_eH^p(M) \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_n^p.$$

Тогда полагают

$$\Theta(X) = \Phi_\theta^{-1}\left(d\pi_p^{p+1}(X)\right). \tag{4}$$

Иными словами, каноническая форма такова, что ее сужение на $T_\theta\big(H^{p+1}(M)\big)$ представляет собой композицию дифференциала канонической проекции π_p^{p+1} и линейного отображения Φ_θ^{-1}.

В связи с данной конструкцией возникает вопрос о корректности построения изоморфизма Φ_θ: почему Φ_θ зависит лишь от репера θ, но не от представляющего его отображения φ? Обсуждению этого вопроса мы посвятим дальнейшую часть статьи.

Прежде всего заметим, что ввиду разложения (2) отображение Φ_θ вполне определяется своими сужениями на каждое из прямых слагаемых $\mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{g}_n^p$ по отдельности. Эти сужения мы рассмотрим в нижеследующих пунктах.

3. Сужение $\boldsymbol{\Phi_\theta}$ на $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Сужение $\Phi_\theta|_{\mathbb{R}^n}$ изоморфизма Φ_θ на первое слагаемое прямой суммы (2) полностью определяется набором векторов

$$X_i(\theta) = d_e\varphi^p\left(\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_e\right),\ i = \overline{1, n},$$

где

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_e = d_0\sigma^p\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_0\right) \in T_e(im\ \sigma^p) \subset T_e\big(H^p(\mathbb{R}^n)\big).$$

Тогда в силу цепного правила для дифференциала имеем

$$X_i(\theta) = (d_e\varphi^p \circ d_0\sigma^p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_0\right) = d_0(\varphi^p \circ \sigma^p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_0\right).$$

Заметим, что $\varphi^p \circ \sigma^p$ есть сужение $\varphi^p|_{\mathbb{R}^n}$ отображения φ^p на $\mathbb{R}^n$, причем для любого $u \in \mathbb{R}^n$, лежащего в области определения отображения φ, имеем

$$(\varphi^p|_{\mathbb{R}^n})(u) = \varphi^p\big(\sigma^p(u)\big) = \varphi^p\big(j_0^p(t_u)\big) = j_0^p(\varphi \circ t_u).$$

Итак,

$$X_i(\theta) = d_0(\varphi^p|_{\mathbb{R}^n})\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_0\right), \tag{5}$$

где $\varphi^p|_{\mathbb{R}^n}$ действует по правилу

$$\varphi^p|_{\mathbb{R}^n}\colon u \mapsto j_0^p(\varphi \circ t_u). \tag{6}$$

Лемма 1. Векторы $X_i(\theta)$ однозначно определяются репером θ, то есть не зависят от выбора его представителя φ.

Доказательство. Рассмотрим локальную карту с координатами $x^i : U \to \mathbb{R}$ в окрестности U точки $x_0 = \pi(\theta)$. Обозначим через

$$(\overline{x}^i, \overline{x}^i_j, \overline{x}^i_{jk}, \dots, \overline{x}^i_{j_1 j_2 \dots j_{p+1}})$$

локальные координаты репера θ относительно данной карты:

$$\overline{x}^i = \varphi^i(0),\ \overline{x}^i_j = \partial_j \varphi^i(0),\ \dots,\ \overline{x}^i_{j_1 j_2 \dots j_{p+1}} = \partial_{j_1 j_2 \dots j_{p+1}} \varphi^i(0), \quad (7)$$

где $\varphi^i = x^i \circ \varphi$, причем ∂_j — символ дифференцирования по t^j, $\partial_{j_1 j_2 \dots j_s} = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \dots \partial_{j_s}$ $(s \geq 2)$. Тогда отображение $\varphi^p|_{\mathbb{R}^n}$ имеет следующее координатное представление в локальной карте на $H^p(M)$ (см. п. 1):

$$x^i = \varphi^i(t^k),\ x^i_{j_1 j_2 \dots j_\alpha} = \partial_{j_1 j_2 \dots j_\alpha} \varphi^i(t^k),\ 1 \leq \alpha \leq p. \qquad (8)$$

В силу (8) векторы $X_i(\theta)$ имеют следующее выражение:

$$X_i(\theta) = \left.\frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\underline{\theta}} + \sum_{\alpha=1}^{p} \left.\frac{\partial(\partial_{j_1 \dots j_\alpha} \varphi^k)}{\partial t^i}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial x^k_{j_1 \dots j_\alpha}}\right|_{\underline{\theta}}.$$

С учетом (7) получим

$$X_i(\theta) = \overline{x}^k_i \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\underline{\theta}} + \overline{x}^k_{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x^k_j}\right|_{\underline{\theta}} + \dots + \overline{x}^k_{i j_1 j_2 \dots j_p} \left.\frac{\partial}{\partial x^k_{j_1 j_2 \dots j_p}}\right|_{\underline{\theta}}, \qquad (9)$$

откуда видно, что данные векторы зависят лишь от репера θ. Лемма доказана.

Замечание 1. В частности, при $p = 3$ имеем:

$$X_i(\theta) = \overline{x}^k_i \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\underline{\theta}} + \overline{x}^k_{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x^k_j}\right|_{\underline{\theta}} + \overline{x}^k_{ijl} \left.\frac{\partial}{\partial x^k_{jl}}\right|_{\underline{\theta}},$$

где $\theta \in H^3(M)$.

Замечание 2. Репер $\theta \in H^1(M)$ 1-го порядка определяет изоморфизм векторных пространств $\mathbb{R}^n \to T_x M$, задаваемый базисом $\{X_i(\theta)\}_{i=\overline{1,n}}$.

Замечание 3. Если $p > q \geq 1$, $\theta \in H^p(M)$, $\theta' = \pi_q^p(\theta)$, то $d\pi_q^p(X_i(\theta)) = X_i(\theta')$, то есть вектор $X_i(\theta)$ проектируется в точности на вектор $X_i(\theta')$ для любого $i = \overline{1,n}$.

4. Сужение $\boldsymbol{\Phi_\theta}$ на $\boldsymbol{\mathfrak{g}_n^p}$. Сужение $\Phi_\theta|_{\mathfrak{g}_n^p}$ изоморфизма Φ_θ на второе слагаемое прямой суммы (2) полностью определяется векторами вида

$$X\big(v, \underline{\theta}\big) = (d_e \varphi^p)(v), \tag{10}$$

где

$$v \in \mathfrak{g}_n^p \cong T_e D_n^p \subset T_e\big(H^p(\mathbb{R}^n)\big), \quad X\big(v, \underline{\theta}\big) \in T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big).$$

Обозначение в левой части (10) оправдано следующей леммой.

Лемма 2. Вектор $X(v, \underline{\theta})$ однозначно определяется выбором вектора $v \in \mathfrak{g}_n^p$ и репера $\underline{\theta}$, то есть не зависит ни от репера θ, ни от выбора его представителя φ.

Доказательство. Заметим, что отображение φ^p перестановочно с действием группы D_n^p на $H^p(\mathbb{R}^n)$ и на $H^p(M)$ правыми сдвигами:

$$\varphi^p(\mu \cdot \xi) = \varphi^p(\mu) \cdot \xi, \quad \mu \in H^p(\mathbb{R}^n),\ \xi \in D_n^p.$$

В самом деле, пусть $\mu = j_0^p b$, $\xi = j_0^p s$, тогда

$$\varphi^{(p)}(\mu \cdot \xi) = j_0^p(\varphi \circ b \circ s) = j_0^p(\varphi \circ b) \cdot j_0^p s = \varphi^p(\mu) \cdot \xi.$$

Поэтому сужение изоморфизма φ^p на группу D_n^p (а значит, и дифференциал данного сужения в единице e) не зависит от φ, а определяется лишь действием группы D_n^p на слое расслоения $H^p(M) \to M$, проходящем через точку $\underline{\theta} = \varphi^p(e)$:

$$\varphi^p(\xi) = \varphi^p(e \circ \xi) = \varphi^p(e) \cdot \xi = \underline{\theta} \cdot \xi,$$

и, таким образом,

$$\varphi^p|_{D_n^p}\colon D_n^p \to H^p(M),\ \xi \mapsto \underline{\theta} \cdot \xi.$$

Тогда из определения дифференциала вытекает, что если $\gamma\colon \mathbb{R} \to D_n^p$ — произвольный путь на D_n^p с касательным вектором v при $t = 0$, то

$$X(v, \underline{\theta}) = d_e\left(\varphi^p|_{D_n^p}\right)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\underline{\theta} \cdot \gamma)(t), \tag{11}$$

причем, как известно, от выбора пути γ значение дифференциала отображения не зависит. Таким образом, правая часть (11), а значит, и вектор $X(v, \underline{\theta})$ зависят лишь от $\underline{\theta}$ и v. Лемма доказана.

Замечание 4. Векторы $X(v, \underline{\theta})$ в каждой точке $\underline{\theta} \in H^p(M)$ образуют базис вертикального подпространства $V_{\underline{\theta}} \subset T_{\underline{\theta}} H^p(M)$, то есть подпространства, касательного к слою $\pi_p^{-1}(x)$ расслоения $H^p(M)$, где $x = \pi_p(\underline{\theta})$.

Замечание 5. Из формулы (9) следует, что для каждого фиксированного $v \in \mathfrak{g}_n^p$ векторное поле $X^p(v)$ на $H^p(M)$, образованное векторами $X(v, \underline{\theta})$, в точности совпадает с фундаментальным векторным полем на $H^p(M)$. соответствующим элементу v. Отметим, что фундаментальные векторные поля определены на любом главном расслоении [4, с. 57].

Каждый элемент $v \in \mathfrak{g}_n^p$ может быть единственным образом представлен в виде

$$v = v_j^i \partial_i^j + v_{jk}^i \partial_i^{jk} + v_{jkl}^i \partial_i^{jkl} + \cdots + v_{j_1 \dots j_p}^i \partial_i^{j_1 \dots j_p},$$

где $\partial_i^{j_1 \dots j_s} = \dfrac{\partial}{\partial u_{j_1 \dots j_s}^i}\Big|_e$ $(1 \le s \le p)$ — векторы натурального базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}_n^p \cong T_e D_n^p$ относительно стандартных координат на D_n^p (см. п. 2), а на координаты $v_{jk}^i, \dots, v_{j_1 \dots j_p}^i$ накладывается требование симметричности по всем нижним индексам.

Для примера выведем выражение фундаментального векторного поля $X^3(v)$ в локальных координатах на расслоении $H^3(M)$, где

$$v = v_j^i \partial_i^j + v_{jk}^i \partial_i^{jk} + v_{jkl}^i \partial_i^{jkl}. \tag{12}$$

Уравнения пути $\gamma \colon \mathbb{R} \to D_n^3$ с касательным вектором (10) можно представить в виде

$$u_j^i(t) = \delta_j^i + v_j^i t + o(t),\ u_{jk}^i(t) = v_{jk}^i t + o(t),$$

$$u_{jkl}^i(t) = v_{jkl}^i t + o(t),$$

где $o(t)$ — члены порядка малости больше единицы при $t \to 0$. Подставляя данные уравнения в (1), получим

$$\tilde{x}_j^i(t) = x_j^i + \xi_j^i(x) t + o(t),$$

$$\tilde{x}_{jk}^i(t) = x_{jk}^i + \xi_{jk}^i(x) t + o(t),$$

$$\tilde{x}_{jkl}^i(t) = x_{jkl}^i + \xi_{jkl}^i(x) t + o(t),$$

где

$$\begin{gathered} \xi_j^i(x) = x_k^i v_j^k,\ \xi_{jk}^i(x) = x_m^i v_{jk}^m + 2 x_{m(j}^i v_{k)}^m, \\ \xi_{jkl}^i(x) = x_m^i v_{jkl}^m + 3 x_{m(l}^i v_{jk)}^m + 3 x_{m(jk}^i v_{l)}^m. \end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, в данном случае формула (11) дает следующее выражение для $X^3(v)$:

$$X^3(v) = \xi_j^i(x) \frac{\partial}{\partial x_j^i} + \xi_{jk}^i(x) \frac{\partial}{\partial x_{jk}^i} + \xi_{jkl}^i(x) \frac{\partial}{\partial x_{jkl}^i},$$

где коэффициенты $\xi_j^i(x)$, $\xi_{jk}^i(x)$, $\xi_{jkl}^i(x)$ выражаются по формулам (13).

Заключение. Поскольку сужения $\Phi_\theta|_{\mathbb{R}^n}$ и $\Phi_\theta|_{\mathfrak{g}_n^p}$ изоморфизма Φ_θ вместе полностью определяют данный изоморфизм, из лемм 1 и 2 вытекает

Теорема. *Изоморфизм* Φ_θ *векторных пространств* $T_e H^p(\mathbb{R}^n)$ *и* $T_{\underline{\theta}} H^p(M)$ *определен формулой (3) корректно, то есть зависит лишь от репера* θ *и не зависит от выбора представителя* φ *данного репера*.

Замечание 6. Изоморфизм Φ_θ, определяемый репером $\theta \in H^{p+1}(M)$, наделяет касательное пространство $T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big)$ базисом, состоящим из векторов

$$X_i(\theta),\ X_i^j,\ X_i^{jk},\ \ldots,\ X_i^{j_1 \ldots j_p},$$

где

$$X_i^{j_1 \ldots j_s} = X^p\left(\partial_i^{j_1 \ldots j_s}, \underline{\theta}\right) = \Phi_\theta\left(\partial_i^{j_1 \ldots j_s}\right),\ 1 \le s \le p.$$

Замечание 7. Линейная оболочка L_θ векторов $X_i(\theta)$, $i = \overline{1, n}$, является n-мерным подпространством в $T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big)$, горизонтальным относительно проекции π_p, и однозначно определяется репером θ. Отметим, что аналогичными свойствами обладают R-плоскости на расслоениях k-джетов сечений локально тривиальных расслоений [1, с. 104].

Обсуждению вопроса о том, как вывести координатное представление для скалярных компонент формы Θ, получаемых при ее разложении по стандартном базису пространства $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_n^p$, мы планируем посвятить отдельную статью.

Список литературы

1. *Виноградов А.М.* Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1980. Т. 11. С. 89—134.

2. *Евтушик Л.Е.*Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1969. Т. 2. С. 119—150.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—246.

4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. Т. 1. М., 1981.

5. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

6. *Юмагужин В. А.* Интегрируемые геометрические структуры конечного типа // Фундамент. и прикл. матем. 2004. Т. 10, вып. 1. С. 255—269.

7. *Kolář I., Michor P., Slovák J.* Natural operations in differential geometry. Springer, 1993.

Для цитирования: *Кулешов А. В.* О конструкции канонической формы на расслоении реперов // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 5—17. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-1.

MSC 2010: 58A10, 58A20, 58A32.

A. V. Kuleshov

Immanuel Kant Baltic Federal University

14, A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia

arturkuleshov@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-1

On construction of the canonical form on the frame bundle

Submitted on May 14, 2023

The detailed description of the construction of the canonical form on the higher order frame bundle over an n-dimensional smooth manifold is given. In particular, it is shown that some vector space isomorphism playing the key role in this construction is defined correctly, i. e. it depends only on the frame of order $p+1$ and does not depend on the choice of its representative, i. e. a local diffeomorphism which $(p+1)$-jet is exactly this frame. This isomorphism acts from the direct sum of n-dimensional arithmetic space and the Lie algebra of the p-th order differential group to the tangent space to the p-th order frame bundle over the manifold at the p-th order frame lying "below". The action of this isomorphism can be splitted into two its restrictions. The first one acts from the first direct summand, and the second one acts from the second direct summand. It is shown that the first restriction depends only on the choice of the $(p+1)$-frame, while the second one is closely related to fundamental vector fields and therefore does not depend of this frame at all.

Keywords: smooth manifold, jet, frame bundle, canonical form

References

1. *Vinogradov, A.M.:* Geometry of nonlinear differential equations. J. Soviet. Math., **17**:1, 1624—1649 (1981).
2. *Evtushik, L.E.:* Differential connections and infinitesimal transformations of a prolonged pseudogroup. Tr. Geom. Sem. 2, 119—150 (1969).
3. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet. Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).
4. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Foundations of differential geometry. Interscience publishers, New York, London (1963).
5. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem. 1, 139—189 (1966).
6. *Yumaguzhin, V. A.:* Finite-type integrable geometric structures. J. Math. Sci. 136, 4401—4410 (2006).
7. *Kolář, I., Michor, P., Slovák, J.*: Natural operations in differential geometry. Springer. Berlin, Heidelberg, 1993.

For citation: Kuleshov, A.V. On construction of the canonical form on the frame bundle. DGMF, 54 (2), 5—17 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-1.