УДК 514.75

М. А. Чешкова

Алтайский государственный университет, Барнаул

К геометрии листа Мёбиуса

В евклидовом пространстве рассматривается лист Мёбиуса. В процессе исследования используется система компьютерной математики *Maple*.

Ключевые слова: лист Мёбиуса, Поверхность Каталана, периодические функции.

Впервые уравнение неориентируемой поверхности, открытой Мёбиусом, было получено Машке [1].

Если гауссова кривизна листа Мёбиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В работах [3—5] строятся пересекающиеся листы Мёбиуса, указано разрезание бутылки Клейна на два листа Мёбиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π -периодической вектор-функцией $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической.

Так как

$$\rho(v) = \rho(v + 4\pi),$$

то функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho_1(v)),$$

где

$$\rho_1(v) = \rho(v + 2\pi)$$

есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho_1(v))$$

есть 2π -антипериодическая не равная нулю.

Рассмотрим линейчатую поверхность [6, с.102] M:

$$r(u,v) = s(v) + ul(v) .$$

Когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, прямая $L = (s(v),\ l(v))$ сменит направление на противоположное.

Рассмотрим вектор нормали $n = [s'(v),\ l(v)]$ вдоль линии $s = s(v)$. Если $n \neq 0$, то $n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность M в этом случае односторонняя.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Если гладкая замкнутая неплоская кривая без самопересечения задается 4π *-периодической вектор-функцией* $\rho = \rho(v)$, *которая не является* 2π *-периодической и* 2π *-антипериодической, то вектор-функция*

$$r(u,v) = s(v) + ul(v) ,$$

где $l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho_1(v))$,

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho_1(v)) ,$$

$$\rho_1(v) = \rho(v + 2\pi) ,$$

определяет лист Мёбиуса, для которого $s = s(v)$ *— средняя линия, а* $\rho = \rho(v) = r(1,v)$ *— край.*

Поверхностью Каталана называется [6, с.77] линейчатая поверхность, образующие которой параллельны одной и той же постоянной плоскости (*плоскости параллелизма)*.

Построим примеры листа Мёбиуса, которые являются поверхностями Каталана.

Пример 1. Рассмотрим поверхность переноса [6, с. 287] окружности по эллипсу

$$R(u,v) = (a\cos(u),\ b\cos(v) + a\sin(u),\ c\sin(v)).$$

Зададим на этой поверхности линию $u = \dfrac{v}{2}$. Имеем

$$\rho = \rho(v) = (a\cos\frac{v}{2},\ b\cos(v) + a\sin(\frac{v}{2}),\ c\sin(v)),$$

$$s = s(v) = (0,\ b\cos(v),\ c\sin(v)),$$

$$l = l(v) = (a\cos(\frac{v}{2}),\ a\sin(\frac{v}{2}), 0).$$

Замечаем, что линия центров есть эллипс, а образующая линейчатой поверхности $r(u,v) = s(v) + ul(v)$ параллельна плоскости $z = 0$. Следовательно, лист Мёбиуса есть поверхность Каталана.

Используя математический пакет *Maple* [7], построим рассматриваемые поверхности и кривые, задав параметры $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$ (рис. 1—4).

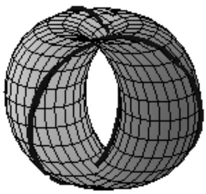

Рис. 1. Поверхность переноса, край $u = \dfrac{v}{2}$

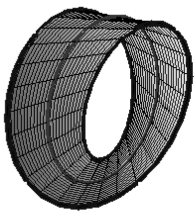

Рис. 2. Лист Мёбиуса, край $u = \dfrac{v}{2}$

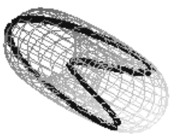

Рис. 3. Край $u = \dfrac{v}{2}$
на поверхности переноса

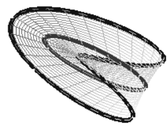

Рис. 4. Край $u = \dfrac{v}{2}$
средняя линия на листе Мёбиуса

Пример 2. На поверхности переноса окружности по эллипсу зададим линию $u = \dfrac{3v}{2}$.

Имеем

$$\rho = \rho(v) = (a\cos\frac{3v}{2},\ b\cos(v) + a\sin(\frac{3v}{2}),\ c\sin(v)),$$

$$s = s(v) = (0,\ b\cos(v),\ c\sin(v)),$$

$$l = l(v) = (a\cos(\frac{3v}{2}),\ a\sin(\frac{3v}{2}), 0).$$

Поверхность Каталана есть лист Мёбиуса, перекрученный трижды.

Используя математический пакет *Maple,* построим рассматриваемые поверхности и кривые, задав параметры $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$.

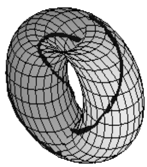

Рис. 5. Поверхность переноса,
край $u = \dfrac{3v}{2}$

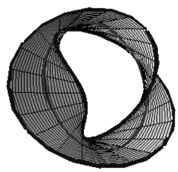

Рис. 6. Трижды перекрученный
лист Мёбиуса, край $u = \dfrac{3v}{2}$

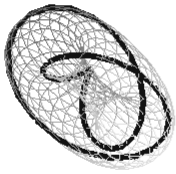

Рис. 7. Край $u = \frac{3v}{2}$ на поверхности переноса

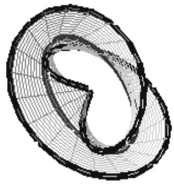

Рис. 8. Край $u = \frac{3v}{2}$ и средняя линия на листе Мёбиуса

Список литературы

1. *Mashke H.* Note on the unilateral surface of Mobius // Trans. Amer. Math. Sos. 1900. Vol. 1.1.

2. *Сабитов И.Х.* Изометрические погружения и вложения плоского листа Мёбиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. 2007. Т. 71, №5. С. 197—224.

3. *Чешкова М.А.* О листе Мёбиуса // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. 2006. Вып. 6. С. 83—86.

4. *Чешкова М.А.* Самопересечение листа Мёбиуса // Математическое образование в регионах России : тр. междунар. науч.-практ. конф. Барнаул, 2007. С. 50—54.

5. *Чешкова М.А.* О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. Барнаул, 2012. №1/1. С. 130—133.

6. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М.* Аналитические поверхности. М., 2006.

7. *Васильев А.Н.* Maple 8. М. ; СПб. ; Киев, 2003.

M. Cheshkova

To geometry of the Moebius band

In the Euclidean space we consider the Moebius band, using a system of computer mathematics Maple.