имеем три распределения Δ^q_{p-1}, Δ^ℓ_{p-1}, Δ^p_{p-1}.

Распределение Δ^p_{p-1} определяется ковектором $s_i=\gamma_{ij}c^j$. Есл орт $\vec{e}_p$ репера направим по $\vec{p}$, а орты $\vec{e}_a \perp \vec{e}_p$ $(a=\overline{1,p-1})$, то $c_k=\lambda\gamma_{k}$ и $c_a=0$, а тогда вдоль $\Delta^p_{p-1}(x)$ будет

$$d\vec{e}_{p+2}=\omega^i_{p+2}\vec{e}_i+\omega^{p+1}_{p+2}\vec{e}_{p+1}=\omega^i_{p+2}\vec{e}_i+c_a\omega^a\vec{e}_{p+1}=\omega^i_{p+2}\vec{e}_i,$$

т.е. вдоль площадки $\Delta^p_{p-1}(x)$ орт $\vec{e}_{p+2}$ данной нормали переносится параллельно в связности нормального расслоения. Из работы [1] непосредственно следует, что распределение Δ^p_{p-1} будет впо лне интегрируемым в том и только том случае, когда нормальная связность будет плоской.

Условия интегрируемости указанных выше распределений рас смотрены в [3]. В частности, найдена связь между их интегрируемостью и свойствами сетей $\Sigma^*_p\subset V_p$ [2], а также положение двумерной нормали к $\tilde{V}_p$.

Найдем условия одновременной интегрируемости распределений Δ^p_{p-1} и Δ^ℓ_{p-1}. В репере $R=(x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha)$ имеем

$$d\vec{a}_{p+1}=d(c_i b^{ij})\vec{e}_j+c_i b^{ij}\omega^k_j\vec{e}_k+c_i b^{ij}\omega^\alpha_j\vec{e}_\alpha-\omega^i_{p+1}\vec{e}_i-\omega^{p+2}_{p+1}\vec{e}_{p+2}, \qquad (5)$$

$$d\vec{a}_{p+2}=\omega^i_{p+2}\vec{e}_i+\omega^{p+1}_{p+2}\vec{e}_{p+1}. \qquad (6)$$

С другой стороны, в репере $R=(x,\vec{e}_i,\vec{a}_\alpha)$:

$$d\vec{a}_{p+1}=\Omega^i_{p+1}\vec{e}_i+\Omega^{p+1}_{p+1}(c_i b^{ij}\vec{e}_j-\vec{e}_{p+1})+\Omega^{p+2}_{p+1}\vec{e}_{p+2}, \qquad (7)$$

$$d\vec{a}_{p+2}=\Omega^i_{p+2}\vec{e}_i+\Omega^{p+1}_{p+2}(c_i b^{ij}\vec{e}_j-\vec{e}_{p+1})+\Omega^{p+2}_{p+2}\vec{e}_{p+2}. \qquad (8)$$

Из (5) - (8), в частности, получаем

$$\Omega^{p+1}_{p+1}=-c_i b^{ij}\omega^{p+1}_j, \qquad (9)$$

$$\Omega^{p+2}_{p+1}=c_i b^{ij}\omega^{p+2}_j-\omega^{p+2}_{p+1}=0, \qquad (10)$$

$$\Omega^{p+1}_{p+2}=-\omega^{p+1}_{p+2}, \qquad (11)$$

$$\Omega^{p+2}_{p+2}=0. \qquad (12)$$

Формы Ω^α_β определяют связность $\tilde{\nabla}$. Эта связность будет плоской тогда и только тогда, когда

$$D\Omega^\beta_\alpha-\Omega^\gamma_\alpha\wedge\Omega^\beta_\gamma=0,$$

т.е.

$$D\Omega^{p+1}_{p+2}-\Omega^{p+1}_{p+2}\wedge\Omega^{p+1}_{p+1}-\Omega^{p+2}_{p+2}\wedge\Omega^{p+1}_{p+2}, \qquad (13)$$

$$D\Omega^{p+1}_{p+1}-\Omega^{p+2}_{p+1}\wedge\Omega^{p+1}_{p+2}=0. \qquad (14)$$

В силу (II) условие (I3) равносильно интегрируемости распределения Δ^p_{p-1}. В силу (9) условие (I4) равносильно интегрируемости распределения Δ^ℓ_{p-1}. Таким образом, распределения Δ^p_{p-1} и Δ^ℓ_{p-1} интегрируемы одновременно тогда и только тогда, когда связность $\tilde{\nabla}$ будет плоской.

Библиографический список

1. А к и в и с М.А., Ч а к м а з я н А.В. О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью // Докл. АН АрмССР. 1976. Т.62. № 2. С.75-81.

2. Б а з ы л е в В.Т., К у з ь м и н М.К., С т о л я р о в А.В. Сети на многообразиях // Проблемы геометрии: Сб./ ВИНИТИ. М., 1981. Т.12. С.97-125.

3. Е с и н В.А. К геометрии распределений на $V_p\subset E_{p+2}$ // Тезисы сообщ. IX Всесоюз. геометр. конф. Кишинев, 1988. С.112-113.

4. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Труды геометрического семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.29-48.

УДК 514.75

ТЕОРИЯ КОНФОКАЛЬНЫХ КВАДРИК И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

А.А.З а й ц е в

(Калининградский государственный университет)

Излагается конструкция некоторого семейства интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем в фазовом пространстве произвольной размерности вместе с полным набором первых интегралов. Построена производящая функция гамильтонианов. На основе теории конфокальных квадрик методом Гамильтона-Якоби эти системы интегрируются в квадратурах.

I. Основные приложения теории конфокальных квадрик нашли место в классической механике. Наиболее известный пример: решение Ньютоном задачи Кеплера о движении материальной точки в центральном силовом поле с потенциалом $u=-\frac{k}{r}$. Большинство остальных применений принадлежит К.Якоби [1], который решил задачи о притяжении двумя неподвижными центрами, о движении с постоянной тягой в поле одного притягивающего центра и др. Наиболее важным достижением Якоби является решение задачи о геодезических на эллипсоиде. Одновременно он получил глубокие результаты в самой теории конфокальных квадрик. Позже, развивая методы Якоби, К.Нейман решил [2] трудную задачу о движении материальной точки на сфере под действием квадратичного притягивающего потенциала. В последние годы интерес к этим результатам повысился в связи с активным изучением интегрируемых гамильтоновых систем, вследствие большой роли последних в современном математическом естествознании. Недавно Ю.Мозер в серии замечательных работ [3] - [5] по-новому рассмотрел результаты Ньютона, Якоби, Неймана и др., связав их с достижениями последних лет, после чего стало ясно, что в применениях теории конфокальных квадрик кроется возможность универсального подхода к анализу интегрируемых гамильтоновых систем. В.И.Арнольд высказал мысль [6, Дополнение 14] , что соответствующий подход можно реализовать в виде нелинейного аналога преобразования Фурье преобразования Якоби. Для создания теории этого преобразования полезно увеличить список гамильтоновых систем, интегрируемых при помощи перехода к обобщенным эллиптическим координатам. В данной работе ставится цель частичного пополнения данного списка.

Здесь конструируется широкое семейство интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем вместе с полным набором первых интегралов, находящихся попарно в инволюции. Среди них выделено семейство полиномиальных гамильтонианов, для которых строится производящая функция. Затем исследуемые системы интегрируются в квадратурах методом Гамильтона-Якоби с помощью теории конфокальных квадрик.

2. Отправным пунктом предлагаемой конструкции служат две классические динамические системы и форма их первых интегралов. Первая система порождается гамильтонианом

$$h = \frac{1}{2}|p|^2 + u(|x|^2), \qquad x, p \in R^n; \tag{I}$$

здесь и далее u - потенциальная энергия системы, $x = (x_i)$ и $p = (p_i)$ обозначают совокупности координат и импульсов, индексы i, j, k, m принимают значения $1, 2, \ldots, n$, если особо не оговорено. Соответствующая гамильтонова система имеет вид

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -u_x. \tag{2}$$

Это есть уравнения Ньютона для материальной точки, движущейся в центральном силовом поле. Первыми интегралами системы (2) являются кроме гамильтониана все компоненты тензора момента импульса $\omega \equiv x \wedge p$.

Еще одним первым интегралом является величина $|\omega|^2$; динамическая система, гамильтонианом которой она является, порождает постоянный геодезический поток на сфере [3].

Вторую из упомянутых классических систем дает задача Неймана о движении точки на сфере в поле потенциала

$$u = \frac{1}{2}\langle cx, x\rangle, \qquad c = diag\,(c_1, \ldots, c_n),$$

где $c_i \neq c_j$, если $i \neq j$. Гамильтониан этой системы есть [3] :

$$h = \frac{1}{2}\langle cx, x\rangle + \frac{1}{4}|\omega|^2.$$

Сама система обладает рациональными первыми интегралами

$$f_k(x, p) = x_k^2 + \sum_{i \neq k} \frac{\omega_{ik}^2}{c_k - c_i},$$

которые находятся попарно в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\right). \tag{3}$$

Имея в виду обобщить приведенные примеры, рассмотрим в R^{2n} семейство функций вида

$$f_k(x, p) = p_k^2 + \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\,\omega_{ik}^2 + 2u_k(x), \tag{4}$$

где $c_{ik} = -c_{ki}$, $\omega_{ik} = x_i p_k - x_k p_i$. Предполагается, что функции u_k зависят только от x , причем являются четными от $x_1, \ldots, x_n$; эту зависимость запишем в виде $u_k = u_k(S_m)$, $S_m = x_m^2$. Функции (4) функционально независимы в силу независимости системы $\{p_k^2\}$. Поставим задачу определить условия, при которых они находятся попарно в инволюции относительно скобки Пуассона (3), и указать способ определения их явного вида. Тогда любая линейная комбинация функций (4) будет гамильтонианом системы, интегрируемой по Лиувиллю. Среди них наиболее важным является гамильтониан

$$h = \frac{1}{2}\sum_k f_k = \frac{1}{2}|p|^2 + u(x), \quad u(x) \equiv \sum_k u_k(x). \tag{5}$$

Он порождает динамическую систему, которая допускает несколько физических интерпретаций. В частности, можно считать, что она описывает движение материальной точки в R^n в силовом поле с анизотропным потенциалом (в отличие от системы (I), (2), описывающей движение точки в изотропном поле). В случае, когда $u(x)$ - многочлен, ее можно рассматривать как систему уравнений колебательных движений n взаимодействующих осцилляторов.

3. Простые соображения, основанные на однородности интегралов (4) и их скобки Пуассона по p и отчасти по x, позволяют условие коммутативности

$$\{f_k, f_m\} = 0 \tag{6}$$

расщепить на более простые, изучение которых дает следующий результат.

Т е о р е м а I. Условие коммутативности (6) выполняется тогда и только тогда, когда: а) компоненты антисимметричного тензора $\{c_{ik}\}$ удовлетворяют соотношениям

$$c_{ik} c_{km} + c_{km} c_{mi} + c_{mi} c_{ik} = 0 \left(\begin{smallmatrix} i \neq k, m; \\ k \neq m \end{smallmatrix} \right), \tag{7}$$

б) потенциалы $u_k(x)$ являются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial u_m}{\partial s_k} + c_{km} s_m \sigma_{km} u = 0, \quad k \neq m, \tag{8}$$

где

$$\sigma_{km} \equiv \frac{\partial}{\partial s_k} - \frac{\partial}{\partial s_m}.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению всех решений переопределенной алгебраической системы уравнений (7), а затем к решению (тоже переопределенной) системы дифференциальных уравнений (8). Система алгебраических уравнений (7) имеет много решений. Основной их класс описывает

Т е о р е м а 2. Пусть антисимметричный тензор $\{c_{ik}\}$, удовлетворяющий соотношениям (7), подчиняется дополнительному условию $c_{ik} \neq 0$, если $i \neq k$. Тогда существует набор попарно различных чисел $\{c_i\}$, такой, что

$$c_{ik} = (c_i - c_k)^{-1}. \tag{9}$$

Другие решения менее интересны, поэтому далее рассматриваются только такие величины c_{ik}, о которых говорится в теореме 2.

4. Множество нетривиальных (не сводящихся к константе) решений системы (8) непусто. Простейшее из них есть

$$u_k = s_k. \tag{10}$$

В этом случае гамильтониан (5) есть гамильтониан системы тождественных гармонических осцилляторов, между которыми нет взаимодействия. Но даже этот случай нельзя считать тривиальным, поскольку другие линейные комбинации первых интегралов (4) дают гамильтонианы нелинейных динамических систем. Размножить решения системы уравнений (8) позволяет

Т е о р е м а 3. Пусть набор функций $\{u_k\}$ является решением системы дифференциальных уравнений (8), тогда следующее преобразование Беклунда:

$$\hat{u}_m = c_m u_m - s_m u, \quad u \equiv \sum_i u_i, \quad \hat{u} \equiv \sum_i \hat{u}_i \tag{11}$$

дает новое решение этой системы.

5. Этот пункт посвятим описанию полиномиальных решений системы уравнений (8); в конце п.2 отмечено, что они представляют потенциалы взаимодействия нелинейных осцилляторов.

Т е о р е м а 4. Векторное пространство полиномиальных решений системы дифференциальных уравнений (8) является бесконечномерным, причем для каждого натурального числа N размерность подпространства полиномиальных решений степени $\leqslant N$ в точности равна N.

Можно выделить естественный базис пространства полиномиальных решений, который строится с помощью преобразования Беклунда (11), причем первыми элементами базиса (они берутся в качестве затравочных решений) служат функции (10). Базисные многочлены имеют простую производящую функцию. Определим ее компоненты равенствами

$$w_m = \sum_{k=1}^{\infty} u_m^k \tau^k, \tag{12}$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} u^k \tau^k; \tag{13}$$

здесь k обозначает степень базисного многочлена. Явный вид производящих функций дает

Т е о р е м а 5. Для производящих функций w_m и w имеют место представления

$$w_m = \frac{\tau s_m}{1 - c_m \tau} (1 - w), \tag{14}$$

$$w = 1 - \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau s_i}{1 - c_i \tau}\right)^{-1}. \tag{15}$$

6. Проинтегрируем изучаемое семейство гамильтоновых систем методами Якоби, который использовал разделение переменных, чтобы найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби (ср. изложение этих методов в работе [3]).

Семейство конфокальных квадрик в евклидовом пространстве

R^n задается общим уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\lambda - c_k} + 1 = 0 .$$

При $\lambda \leq \min_{1\leq k\leq n} c_k$ это эллипсоид, а в остальных невырожденных слу-чаях - гиперболоиды. Через каждую точку $x \in R^n$, $x \neq 0$ прохо-дит в точности n квадрик, пересекающихся ортогонально.

Обозначим

$$Q(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - c_k), \quad \mathcal{P}(\lambda) = Q(\lambda)\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\lambda - c_k}\Big). \tag{16}$$

Очевидно, $Q(\lambda)$ и $\mathcal{P}(\lambda)$ многочлены степени n , все нули кото-рых вещественные и простые. Обозначим нули многочлена $\mathcal{P}(\lambda)$ ξ_k, так что

$$\mathcal{P}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \xi_k).$$

Функции $\{\xi_k\}$ задают криволинейную систему координат; их при-нято называть обобщенными эллиптическими координатами Якоби.

Как и в [3], получаем следующее представление для евкли-довой метрики в R^n в координатах $\{\xi_k\}$:

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} g_k(\xi)\, d\xi_k^2 ,$$

где

$$g_k = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{(\xi_k - c_i)^2} = -\frac{1}{4} \frac{\mathcal{P}'(\lambda;\xi)\big|_{\lambda=\xi_k}}{Q(\xi_k)} . \tag{17}$$

Следовательно, для обобщенных импульсов η_k и кинетической энергии T имеют место формулы

$$\eta_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_k} = g_k \dot{\xi}_k , \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_i^2}{g_i} . \tag{18}$$

Производящая функция потенциальной энергии w , имеющая представление (15), выражается в эллиптических координатах следующим образом:

$$w = 1 - \frac{Q(\frac{1}{\tau})}{\mathcal{P}(\frac{1}{\tau})} = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{\tau} - c_k}{\frac{1}{\tau} - \xi_k} . \tag{19}$$

Т е о р е м а 6. В эллиптических координатах $\{\xi_k\}$ систе-ма нелинейных осцилляторов с гамильтонианом (5), где потенциа-лом взаимодействия является производящая функция w , опреде-ленная выражением (15), расщепляется на (невзаимодействующие) одномерные осцилляторы. Соответствующее разложение для гамиль-тониана имеет вид

$$h = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k(\xi_k, \eta_k)}{g_k} , \quad h_k(\xi_k, \eta_k) = \frac{1}{2} \eta_k^2 + v_k(\xi_k), \tag{20}$$

где

$$v_k(\xi_k) = \frac{1}{4} \frac{1}{\xi_k - \frac{1}{\tau}} .$$

З а м е ч а н и е. Ясно, что утверждение теоремы 6 оста-ется справедливым, если потенциалом взаимодействия является любое полиномиальное решение системы (8).

Процедура расщепления системы нелинейных осцилляторов на одномерные невзаимодействующие осцилляторы путем перехода к эллиптическим координатам аналогична хорошо известному перехо-ду с помощью подходящего ортогонального преобразования к нор-мальным модам в теории систем линейных осцилляторов.

Стационарное уравнение Гамильтона-Якоби

$$h\Big(\xi, \frac{\partial S}{\partial \xi}\Big) = h_0$$

можно записать, если учесть формулы (20) и (17), в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{g_k} \Big(\Big(\frac{\partial S}{\partial \xi_k}\Big)^2 + \frac{1}{2(\xi_k - \frac{1}{\tau})} \Big) = a_1 , \tag{21}$$

где $a_1 = 2(1 - h_0)$. Для определения полного интеграла уравнения (21) вводится вспомогательный многочлен

$$M(\lambda) = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n ,$$

где $a_2, \ldots, a_n$ - произвольные константы, а константа a_1 та же самая, что и в правой части уравнения (21). Подсчет суммы вы-четов в простых конечных полюсах функции $M(\lambda)/\mathcal{P}(\lambda)$ дает тождес-тво

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{M(\xi_k)}{\mathcal{P}'(\xi_k)} = a_1 ,$$

которое позволяет преобразовать уравнение (21) к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{g_k} \Big(\Big(\frac{\partial S}{\partial \xi_k}\Big)^2 - R(\xi_k) \Big) = 0 ,$$

где

$$R(z) \equiv \frac{M(z)}{Q(z)} - \frac{1}{2(z - \frac{1}{\tau})} .$$

Следовательно, полный интеграл уравнения (21) определяется из решения следующей системы n уравнений:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi_k}\right)^2 = R(\xi_k)$$

Их интегрирование дает

$$S = \sum_{k=1}^{n} \int^{\xi_k} \sqrt{R(z_k)}\, dz_k .$$

Как обычно, значения обобщенных координат ξ_k и импульсов η_k вычисляются по формулам

$$\eta_k = \frac{\partial S}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = b_k, \quad \frac{\partial S}{\partial h_0} = t - b_1,$$

где $b_1, \ldots, b_n$ — произвольные константы, что завершает решение задачи.

Таким же путем интегрируются другие гамильтоновы системы, рассмотренные в данной работе.

7. Изученные гамильтоновы системы имеют множество приложений, особенно в теории солитонов; их нужно выявить и изучить. Полезно также рассмотреть аналогичные системы в комплексном фазовом пространстве, связав их с теорией комплексных квадрик. Заслуживают также внимания связи этих систем с динамическими системами на алгебрах Ли.

Библиографический список

1. Я к о б и К. Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ, 1936.

2. Neumann C. De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultra-ellipticorum classen revocatur // J. Reine Angew. Math. 1859. B. 56. S. 46-53.

3. М о з е р Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1981. Т. 36. Вып. 5. С. 109-151.

4. Moser J. Integrable Hamiltonian systems and spectral theory. Lezione Fermiane. Pisa, 1981. P. 157-229.

5. Moser J. Geometry of Quadrics and Spectral Theory. The Chern Symposium. 1979. P. 147-188.

6. А р н о л ь д В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

УДК 514.75

ОБ ОДНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НОРМАЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА ОСНАЩЕННОЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е.Т. И в л е в

(Томский политехнический институт)

В данной статье изучаются некоторые инвариантные поля двойственных линейных подпространств, принадлежащих соответствующим касательным m-плоскостям L_m к оснащенным m-поверхностям S_m в P_{n+1}. С помощью этих полей линейных подпространств выясняется дополнительная геометрическая характеристика оснащенных m-поверхностей $S^h_m, S^{1234}_m, S_{m,2}$, изученных в [1], а также проводится одна из возможных классификаций нормальных расслоений на оснащенных m-поверхностях S_m в P_{n+1}. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] и [2].

I. Каждой точке $A_0 \in S_m$ в соответствующей m-плоскости L_m, касательной к S_m в этой точке, сопоставим подпространства L^1, L^2:

$$\begin{cases} L^1 \cap L^2 = A_0, \quad L^1 \cup L^2 = L_m, \quad \dim L^1 = r, \\ \dim L^2 = m - r \quad (r < m,\ r > 1,\ m - r > 1). \end{cases} \tag{I}$$

Эти подпространства в локальных проективных координатах репера T определим уравнениями:

$$L^h:\ x^{\beta_g} = a^{\beta_g}_{\alpha_h} x^{\alpha_h}, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0 \tag{2}$$
$$(h, g = 1,2;\ h \neq g;\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \tau_1 = \overline{1, r};\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \tau_2 = \overline{r+1, m}),$$

где величины $a^{\beta_g}_{\alpha_h}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla a^{\beta_g}_{\alpha_h} + \omega^{\beta_g}_{\alpha_h} + a^{\gamma_g}_{\alpha_h} a^{\beta_g}_{\beta_h} \omega^{\beta_h}_{\gamma_g} = A^{\beta_g}_{\alpha_h \alpha} \omega^{\alpha}_0 . \tag{3}$$

В дальнейшем будем пользоваться такой фиксацией репера T, при которой

$$L^1 = (A_0 A_1 \ldots A_r),\ L^2 = (A_0 A_{r+1} \ldots A_m), \tag{4}$$

что в силу (2) и (3) приводит к соотношениям

$$\begin{cases} a^{\beta_g}_{\alpha_h} = 0, \quad \omega^{\beta_g}_{\alpha_h} = A^{\beta_g}_{\alpha_h \alpha} \omega^{\alpha}_0, \\ \nabla A^{\beta_g}_{\alpha_h \alpha} + A^{\beta_g}_{\alpha_h \alpha} \omega^0_0 - \delta^{\beta_g}_{\alpha} \omega^0_{\alpha_h} = A^{\beta_g}_{\alpha_h \alpha \beta} \omega^{\beta}_0 . \end{cases} \tag{5}$$