УДК 514.76

К. В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-3

О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами

Изучается многообразие, структурные уравнения и деривационные формулы которого построены с помощью деформаций внешнего и обычного дифференциалов. Рассмотрены расслоения несимметричных кореперов и реперов 2-го порядка на этом многообразии и задана аффинная связность. Доказано, что кривизна и кручение этой связности не являются тензорами. Построена каноническая связность и показано, что она является плоской и несимметричной.

Ключевые слова: возмущение дифференциала, касательное пространство 2-го порядка, несимметричные реперы и кореперы 2-го порядка, объекты кручения и кривизны, плоская и несимметричная связность

Введение

Введением деформации внешнего и обычного дифференциалов D и d на гладком многообразии X_m в [4] был построен аппарат, позволяющий построить многообразие $\breve{X}_m$ с несимметричными формами дифференциальных групп 2-го и более высоких порядков, а также несимметричными векторами касательного пространства 2-го и более высоких порядков. Рас-

---

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

сматриваемое многообразие $\breve{X}_m$ представляет собой деформацию обычного гладкого многообразия X_m и называется деформирующимся [2; 10].

В данной работе мы приводим структурные формы и деривационные уравнения полученного многообразия $\breve{X}_m$. Задаем аффинную связность на этом многообразии, а также объекты ее кривизны и кручения. Рассматриваем каноническую аффинную связность, объекты ее кривизны и кручения. Полученные результаты в значительной степени согласуются с результатами работ по неголономным реперам [7] и неголономным многообразиям [8].

Деформации дифференциалов D и d в кокасательном T^*X_m и касательном TX_m пространствах многообразия X_m были определены в [4] с помощью введения внешнего поля $f = f(x^i, x^\xi)$ для возмущения внешнего дифференциала D и внутреннего поля $f^\xi = f^\xi(x^i)$ для возмущения дифференциала d; $i, j, k = 1, \dots, m$. В настоящей работе продолжаем изучать случай, когда значения индекса ξ нумеруют элементы матрицы (x^i_j), то есть $(x^\xi) = (x^i_j)$ и $f^\xi = f|_{x^\xi=1,\text{остальные}=0}$; $\xi = m+1, \dots, m+m^2$.

Замечание 1. В работе [11] рассматривается глобальная геометрия некоммутативных теорий поля с точки зрения деформации, где изучаемые пространства-время — это деформации классических пространственно-временных многообразий. Показано, как можно получить деформацию ассоциированных векторных расслоений.

Замечание 2. Следует отметить, что касательные (а также кокасательные) пространства многообразий X_m и $\breve{X}_m$ не различаются, различие проявляется для 2-го и более высоких порядков.

В [4] внешняя деформация внешнего дифференциала D (то есть отображение $\breve{D}$) и внешняя деформация дифференциала касательных векторов (то есть отображение $\breve{d}$) определены по законам

$$\breve{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)|_{\wedge^2 T^*},$$
$$\check{d}v = dv + d(v(f^{\xi}))\partial_{\xi}\big|_{T^*},$$

где

$$f = f(x^i, x^{\xi}), f^{\xi} = f^{\xi}(x^i), v = v^i\partial_i, d\big(v(f^{\xi})\big) = v^i d(\partial_i f^{\xi}).$$

Причем вдоль линии ρ на многообразии $\check{X}_m$ выполняются традиционные равенства

$$\breve{D}^2\big|_{\rho} = 0,\ \breve{D}(\check{d}v)\big|_{\rho} = 0.$$

Замечание 3. Для дифференциала $\breve{D}$ справедливо $\breve{D}g = dg$, $\breve{D}(df) = 0, \breve{D}\big(dx^{\xi}\big) = 0, \breve{D}^2\big(a_{\xi}dx^{\xi}\big) = 0$ (см.: [4]).

Замечание 4. При ограничении на подпространство деформации внешнего дифференциала, рассматриваемые в работах [2; 9; 10; 12; 13], являются дифференциалами.

В частности, для элементов dx^i и $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ операторы $\breve{D}$ и $\check{d}$ дают

$$\breve{D}(dx^i) = \bar{N}^i_{jk}dx^j \wedge dx^k,$$
$$\check{d}(\partial_i) = \left(\partial_{ij} + \bar{N}^{\xi}_{ij}\partial_{\xi}\right)\otimes dx^j,$$

где

$$\bar{N}^i_{jk} = \delta^i_{[k}\partial_{j]}f,\ \ \bar{N}^{\xi}_{ij}\partial_{\xi} = \partial_{ij}f^{\xi}$$

— кососимметрический и симметрический объекты, задающие возмущения дифференциалов $\breve{D}$ и $\check{d}$ на элементах dx^i и ∂_i.

1. Структурные уравнения и деривационные формулы деформирующегося многообразия

Рассмотрим над m-мерным деформирующимся многообразием $\check{X}_m$ главное расслоение реперов 2-го порядка $D^2_m(\check{X}_m)$ со структурными уравнениями [4; 5; 7; 8]

$$\breve{D}\omega^i = \omega^j \wedge \breve{\omega}_j^i, \tag{1}$$

$$\breve{D}\breve{\omega}_j^i = \breve{\omega}_j^k \wedge \breve{\omega}_k^i + \omega^k \wedge \breve{\omega}_{jk}^i, \tag{2}$$

$$\breve{D}\breve{\omega}_{jk}^i = \breve{\omega}_{jk}^l \wedge \breve{\omega}_l^i - \breve{\omega}_{lk}^i \wedge \breve{\omega}_j^l - \breve{\omega}_{jl}^i \wedge \breve{\omega}_k^l + \omega^l \wedge \breve{\omega}_{jkl}^i.$$

При фиксации точки многообразия структурные формы $\breve{\omega}_j^i, \breve{\omega}_{jk}^i$ превращаются в формы, являющиеся инвариантными формами (обобщенной) дифференциальной группы 2-го порядка D_m^2 [7]. Уравнения (1), (2) задают главное расслоение касательных реперов $D_m^1(\check{X}_m)$. Его типовым слоем является линейная группа $D_m^1 = GL(m)$, действующая в касательном пространстве $T\check{X}_m$ в точке А, фиксируемой вполне интегрируемой системой уравнений $\omega^i = 0$.

Замечание 5. Будем сохранять галочку над несимметричными формами (в том числе двухиндексными формами $\breve{\omega}_j^i$) и несимметричными векторами, полученными в результате применения операторов $\breve{D}$ и $\check{d}$, чтобы подчеркнуть их связь с $\breve{D}$ и $\check{d}$, а также отметить их отличие от классических форм и векторов.

Формы $\omega^i, \breve{\omega}_j^i, \breve{\omega}_{jk}^i$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx_j^i, d\check{x}_{jk}^i\}$ выражаются по формулам [3—5]

$$\omega^i = x_j^i dx^j,$$

$$\breve{\omega}_j^i = -\overset{*}{x}{}_j^k dx_k^i - \check{x}_{jk}^i \omega^k, \tag{3}$$

$$\breve{\omega}_{jk}^i = \breve{\Delta}\check{x}_{jk}^i + (\check{x}_{j[k}^s \check{x}_{sl]}^i - \check{x}_{jkl}^i)\omega^l,$$

$$\breve{\omega}_{jkl}^i = \breve{\Delta}\check{x}_{jkl}^i - \check{x}_{sk}^i \breve{\omega}_{jl}^s - \check{x}_{js}^i \breve{\omega}_{kl}^s + \check{x}_{jk}^s \breve{\omega}_{sl}^i + (\ldots)_{jkls}^i \omega^s,$$

где x^j — локальные координаты точки на многообразии. Тензорный дифференциальный оператор $\breve{\Delta}$ действует по закону

$$\check{\Delta} S_{jk}^i = dS_{jk}^i + S_{jk}^l \breve{\omega}_l^i - S_{lk}^i \breve{\omega}_j^l - S_{jl}^i \breve{\omega}_k^l.$$

Слоевые координаты 1-го порядка x_j^i образуют невырожденную матрицу, для которой $(\overset{*}{x}{}_j^i)$ — обратная матрица, то есть $\overset{*}{x}{}_j^i x_k^j = \delta_k^i$.

Слоевые координаты 2-го порядка $\breve{x}_{jk}^i$ несимметричны по нижним индексам, причем

$$\breve{x}_{[jk]}^i = -N_{jk}^i,$$

где

$$N_{jk}^i = \overset{*}{x}{}_{[j}^l \delta_{k]}^i \partial_l f.$$

Компоненты N_{jk}^i можно выразить с помощью ранее введенных $\bar{N}_{jk}^i$ по формуле $N_{jk}^i = x_l^i \bar{N}_{pq}^l \dot{x}_j^p \dot{x}_k^q$.

Координаты $\breve{x}_{jk}^i$ симметричны по нижним индексам, если $N_{jk}^i = 0$. Значит, $\bar{N}_{pq}^l = \delta_{[q}^l \partial_{p]} f = 0$, что выполняется в случае $\partial_p f = 0$, то есть $f = f(x^\xi)$. В этом случае $f^\xi = const$, $\breve{D}\omega = D\omega$, $\check{d}v = dv$, поэтому очевидно несимметричные формы и векторы не получаются.

Всевозможные альтернации слоевых координат 3-го порядка $\breve{x}_{jkl}^i$ удовлетворяют соотношениям

$$\breve{x}_{j[kl]}^i = 0,$$

$$\breve{x}_{[jk]l}^i = \frac{1}{2}(N_{s[k}^i \breve{x}_{j]l}^s - N_{jk}^s \breve{x}_{sl}^i - \breve{x}_{s[k}^i N_{j]l}^s - N_{jk}^s N_{sl}^i) \neq 0,$$

$$\breve{x}_{[j|k|l]}^i = \frac{1}{2}(N_{s[l}^i \breve{x}_{j]k}^s - \breve{x}_{s[l}^i N_{j]k}^s - N_{jl}^s \breve{x}_{sk}^i - N_{jl}^s N_{sk}^i) \neq 0.$$

Слоевые координаты 3-го порядка $\breve{x}_{jkl}^i$ симметричны только по последним двум индексам k, l как следствие использования леммы Картана.

Альтернирование форм $\breve{\omega}_{jk}^i$ имеет вид

$$\breve{\omega}_{[jk]}^i = -\breve{\Delta} N_{jk}^i + (\frac{1}{2} N_{jk}^s \breve{x}_{sl}^i - \frac{1}{2} \breve{x}_{s[k}^i \breve{x}_{j]l}^s - \breve{x}_{[jk]l}^i)\omega^l,$$

то есть

$$\breve{\omega}^i_{[jk]} \equiv -\breve{\Delta} N^i_{jk} \ \ (mod\ \omega^k).$$

При фиксации точки многообразия получим

$$\breve{\omega}^i_{[jk]}\Big|_{\omega^l=0} = \dot{x}^s_{[j}\delta^i_{k]}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\xi \partial x^s}dx^\xi.$$

Значит, формы $\breve{\omega}^i_{jk}$ несимметричны даже при фиксации точки многообразия, то есть

$$\breve{\omega}^i_{[jk]} \not\equiv 0\ (mod\ \omega^k).$$

Кроме того,

$$\breve{\omega}^i_{j[kl]} \equiv \breve{x}^i_{js}\breve{\Delta}\mathrm{N}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{kl}} \ \ (mod\ \omega^k).$$

Каноническая форма 1-го порядка $\omega = \omega^i\varepsilon_i$ на многообразии $\check{X}_m$ связывает касательное $T\check{X}_m = span(\varepsilon_i)$ и кокасательное $T^*\check{X}_m = span(\omega^i)$ пространства к этому многообразию в его текущей точке. Кобазис $\{\omega^i\}$ сопряжен подвижному базису $\{\varepsilon_i\}$, то есть $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Для построенных дифференциалов справедливо

$$\breve{D}\omega^i = D\omega^i + N^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$\check{d}\varepsilon_i = d\varepsilon_i + N^\xi_{ij}\omega^j \otimes \partial_\xi,$$

где

$$N^i_{jk} = x^i_l \overline{N}^l_{pq}\overset{*}{x}{}^p_j\overset{*}{x}{}^q_k, \quad N^\xi_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^k_j\overline{N}^\xi_{lk}$$

— кососимметрический и симметрический объекты, задающие возмущения дифференциалов $\breve{D}$ и $\check{d}$ на элементах ω^i и ε_j.

Линия ρ на многообразии $\check{X}_m$ задается уравнениями $\omega^i = \rho^i\omega$, причем $\breve{D}\omega = \omega \wedge \omega_1$ и

$$\breve{\Delta}\rho^i - \rho^i\omega_1 = \rho^i_1\omega.$$

Слоевые формы $\breve{\omega}_j^i$, $\breve{\omega}_{jk}^i$, интерпретируются как компоненты инфинитезимального перемещения векторного репера ε_i, $\breve{\varepsilon}_{ij}$, удовлетворяющего деривационным уравнениям

$$\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j, \quad \breve{\Delta}\breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{\omega}_{ij}^k \otimes \varepsilon_k = \omega^k \otimes \breve{\varepsilon}_{ijk}, \tag{4}$$

которые получены дифференцированием касательных векторов 1-го и 2-го порядков

$$\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}_i^j \partial_j, \quad \breve{\varepsilon}_{ij} = \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k \partial_{lk} + \breve{x}_{ij}^k \varepsilon_k + \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k N_{lk}^\xi \partial_\xi,$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^i}, \partial_\xi = \frac{\partial}{\partial x^\xi}.$$

Векторы $\breve{\varepsilon}_{ij}$ несимметричны, причем

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]} = -N_{ij}^k \varepsilon_k,$$

$$\breve{\varepsilon}_{(ij)} = \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k \partial_{lk} + \breve{x}_{(ij)}^k \varepsilon_k + \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k N_{lk}^\xi \partial_\xi.$$

Размерность касательного пространства 2-го порядка $T^2 \breve{X}_m = span(\varepsilon_k, \breve{\varepsilon}_{ij})$ деформирующегося многообразия $\breve{X}_m$ равна $\dim T^2 \breve{X}_m = m + m^2$.

2. Аффинная связность на многообразии $\breve{X}_m$

В главном расслоении реперов $D_m^1(\breve{X}_m)$ со структурными уравнениями (1), (2) зададим аффинную связность по Лаптеву с помощью форм

$$\tilde{\breve{\omega}}_j^i = \breve{\omega}_j^i - \breve{\Gamma}_{jk}^i \breve{\omega}^k,$$

где $\breve{\Gamma}_{jk}^i$ — функции на расслоении $D_m^1(\breve{X}_m)$. Дифференцируя формы $\tilde{\breve{\omega}}_j^i$, получим

$$\breve{D}\tilde{\breve{\omega}}_j^i = \tilde{\breve{\omega}}_j^i \wedge \tilde{\breve{\omega}}_j^i + \breve{\omega}^k \wedge \left(\breve{\Delta}\, \breve{\Gamma}_{jk}^i + \breve{\omega}_{jk}^i\right) - \breve{\Gamma}_{jk}^s \breve{\Gamma}_{sl}^i \wedge \omega^k \wedge \omega^l. \tag{5}$$

Согласно теореме Картана — Лаптева, аффинная связность задается полем объекта $\breve{\Gamma}^i_{jk}$

$$\breve{\Delta}\,\breve{\Gamma}^i_{jk} + \breve{\omega}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{jk,l}\breve{\omega}^l. \tag{6}$$

С учетом (6) уравнения (5) принимают вид:

$$\breve{D}\tilde{\breve{\omega}}^i_j = \tilde{\breve{\omega}}^i_j \wedge \tilde{\breve{\omega}}^i_j + \breve{R}^i_{jkl} \wedge \breve{\omega}^k \wedge \breve{\omega}^l,$$

где $\breve{R}^i_{jkl}$ — компоненты объекта кривизны аффинной связности, выражающиеся по формуле

$$\breve{R}^i_{jkl} = \breve{\Gamma}^i_{j[k,l]} - \breve{\Gamma}^s_{j[k}\breve{\Gamma}^i_{|s|l]}. \tag{7}$$

Кривизна аффинной связности не является тензором на деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$

$$\breve{\Delta}\,\breve{R}^i_{jkl} - \breve{\Gamma}^i_{js}\breve{\omega}^s_{[kl]} + \breve{\omega}^i_{j[kl]} \equiv 0. \tag{8}$$

Замечание 6. В работе [8, с. 52] сравнения на объект кривизны $\breve{R}^i_{jk}$ несимметрической аффинной связности неголономного гладкого многообразия имеют вид (8), то есть объект $\breve{R}^i_{jk}$ образует геометрический объект (квазитензор) лишь вместе с объектом связности.

Учитывая, что выражения для альтернированных форм $\breve{\omega}^i_{[kl]}$, $\breve{\omega}^i_{j[kl]}$ известны, сравнения (8) можно записать в уточненном виде:

$$\breve{\Delta}\,\breve{R}^i_{jkl} \equiv -\breve{\gamma}^i_{js}\breve{\Delta}N^s_{kl}, \tag{9}$$

где тензор $\breve{\gamma}^i_{jk}$ имеет вид $\breve{\gamma}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{jk} + \breve{x}^i_{jk}$. Из (9) видно, что кривизна является тензором (причем нулевым) только при $\breve{\gamma}^i_{js} = 0$, то есть для канонической связности, рассматриваемой далее.

Введем формы аффинной связности $\tilde{\breve{\omega}}^i_j$ в структурные уравнения (1):

$$\breve{D}\breve{\omega}^i = \breve{\omega}^j \wedge \tilde{\breve{\omega}}^i_j + \breve{T}^i_{jk}\breve{\omega}^j \wedge \breve{\omega}^k,$$

где $\breve{T}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{[jk]}$ — объект кручения аффинной связности. Альтернируя уравнения (5), получим уравнения

$$\breve{\Delta}\, \breve{T}^i_{jk} + \breve{\omega}^i_{[jk]} = \breve{\Gamma}^i_{[jk],l}\breve{\omega}^l$$

или сравнения

$$\breve{\Delta}\, \breve{T}^i_{jk} \equiv \breve{\Delta}\, N^i_{jk}.$$

При фиксации точки многообразия имеем

$$\breve{\Delta}\, \breve{T}^i_{jk} \equiv \overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\xi \partial x^s}dx^\xi.$$

Откуда видно, что объект кручения $\breve{T}^i_{jk}$ не образует тензор.

Утверждение 1. *На деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$ объект кручения $\breve{T}^i_{jk}$ аффинной связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ не является тензором. Следовательно, аффинная связность на многообразии $\breve{X}_m$ всегда с кручением, то есть несимметрическая.*

На деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$ равенства $\breve{T}^i_{jk} = 0$ не являются инвариантными, следовательно, они могут выполняться лишь в отдельных точках многообразия $\breve{X}_m$.

По аналогии с [3; 6] справедливо

Утверждение 2. *Для аффинной связности справедливо разложение*

$$\breve{\Gamma}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk} + \breve{\gamma}^i_{jk},\ \text{где}\ \breve{\gamma}^i_{jk} = \breve{\gamma}^i_{jk}(x^l, x^p_q).$$

Выражения для кручения и кривизны с учетом тензора деформации $\breve{\gamma}^i_{jk}$ имеют вид

$$\breve{T}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{[jk]} + \breve{\gamma}^i_{[jk]} = N^i_{jk} + \breve{\gamma}^i_{[jk]},$$

$$\breve{R}^i_{jkl} = \partial_s\breve{\gamma}^i_{j[k}\dot{x}^s_{l]} - \breve{\gamma}^i_{js}N^s_{kl} - \breve{\gamma}^s_{j[k}\breve{\gamma}^i_{|s|l]}.$$

3. Оснащающее подпространство

Введем в уравнения (4_1) формы аффинной связности $\tilde{\breve{\omega}}^i_j$:

$$\check{d}\varepsilon_i = \tilde{\breve{\omega}}^j_i \otimes \varepsilon_j + \tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} \otimes \omega^j,$$

где

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \breve{\varepsilon}_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij}\varepsilon_k,$$

или $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + (\breve{\Gamma}^k_{ij} + \breve{x}^k_{ij})\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi$. С учетом тензора $\breve{\gamma}^k_{ij}$ имеем

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j (\partial_{lk} + N^\xi_{lk}\partial_\xi) + \breve{\gamma}^k_{ij}\varepsilon_k.$$

Векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} \equiv 0 \pmod{\omega^k},$$

значит, совокупность векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$ инвариантна (при фиксации точки многообразия). Для многообразия $\breve{X}_m$ векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$ определяют линейное подпространство $\tilde{E} = span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij})$: $\tilde{E} \subset T^2\breve{X}_m$, $\frac{1}{2}m(m+1) \le \dim\tilde{E} \le m^2$.

Найдем векторы, принадлежащие пересечению пространств $\tilde{E} \cap T\breve{X}_m$:

$$v^k\varepsilon_k = v^{ij}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} \Leftrightarrow v^k\varepsilon_k = v^{ij}(\breve{\varepsilon}_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij}\varepsilon_k),$$

$$v^k\varepsilon_k = v^{ij}(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + \breve{x}^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi + \breve{\Gamma}^k_{ij}\varepsilon_k),$$

$$v^k\varepsilon_k = v^{ij}\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + v^{ij}(\breve{x}^k_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij})\varepsilon_k + v^{ij}\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi.$$

В силу линейной независимости $\varepsilon_k, \partial_{lk}, \partial_\xi$ получим

$$v^k = v^{ij}\left(\breve{x}^k_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij}\right),\ \ v^{ij}\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j = 0,\ \ v^{ij}\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk} = 0.$$

Видим, что система

$$v^k = v^{ij}\breve{\gamma}^k_{ij},\ \ v^{ij}\overset{*}{x}{}^{(l}_i \overset{*}{x}{}^{k)}_j = 0,\ \ v^{ij}N^\xi_{lk} = 0$$

имеет ненулевое решение. Таким образом, пространства $\tilde{E}$ и $T\breve{X}_m$ пересекаются.

Задание аффинной связности в расслоении реперов $L_{n^2}(\breve{X}_m)$ над гладким многообразием $\breve{X}_m$ эквивалентно оснащению многообразия $\breve{X}_m$ полем подпространств $\tilde{E} = span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij})$ [8, с. 50].

Несимметричные векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$ можно представить в виде суммы кососимметричных векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]}$ и симметричных векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)}$:

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]} + \tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)},$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]} = (\breve{\mathrm{T}}^k_{ij} - N^k_{ij})\varepsilon_k,\\ \tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)} = \left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j\right)\partial_{lk} + \left(\breve{x}^k_{(ij)} + \breve{\Gamma}^k_{(ij)}\right)\varepsilon_k + (\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk})\partial_\xi.\end{gathered} \tag{10}$$

Альтернирование и симметрирование можно производить под знаком оператора Δ [8, с. 50]. Значит, инвариантными являются совокупности векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]}$, $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)}$ и подпространства $\tilde{E}_{[\,]}$, $\tilde{E}_{(\,)}$.

Оснащающее пространство $\tilde{\mathrm{E}}$ распадается на прямую сумму подпространств $\tilde{E}_{[\,]}$ и $\tilde{E}_{(\,)}$, то есть $\tilde{E} = \tilde{E}_{[\,]} \oplus \tilde{E}_{(\,)}$, размерности которых вычисляются следующим образом [8, с. 50]:

$$\dim\tilde{E}_{[\,]} = \frac{1}{2}m(m+1), \quad \dim\tilde{E}_{(\,)} = \frac{1}{2}m(m-1).$$

С помощью тензора $\breve{\gamma}^k_{ij}$ равенства (10) можно записать короче:

$$\begin{gathered}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]} = \breve{\gamma}^k_{[ij]}\varepsilon_k,\\ \tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)} = \left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j\right)\partial_{lk} + \breve{\gamma}^k_{(ij)}\varepsilon_k + (\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk})\partial_\xi.\end{gathered}$$

4. Каноническая связность

Равенство нулю тензора $\breve{\gamma}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{jk} + \breve{x}^i_{jk}$ выделяет каноническую аффиную связность $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$. Объект $\breve{\gamma}^i_{jk} = \breve{\gamma}^i_{jk}(x^l, x^p_q)$

является тензором деформации от канонической аффинной связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^{i}_{jk}$ к произвольной, то есть $\breve{\gamma}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} = \breve{\Gamma}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} - \overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^{i}_{jk}$.

Теорема. *Справедливы следующие свойства канонической аффинной связности* $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^{i}_{jk} = -\breve{x}^{i}_{jk}$.

1. Каноническая аффинная связность является плоской и несимметричной, то есть

$$\overset{c}{\breve{T}}{}^{i}_{jk} = N^{i}_{jk},\ \overset{c}{\breve{R}}{}^{i}_{jkl} = 0.$$

Действительно, в силу выражений (7) получим равенство $\overset{c}{\breve{T}}{}^{i}_{jk} = N^{i}_{jk}$, то есть

$$\overset{c}{\breve{T}}{}^{i}_{jk} = \dot{x}^{l}_{[j}\delta^{i}_{k]}\partial_l f.$$

2. Задание канонической аффинной связности в расслоении реперов $D^1_m(\breve{X}_m)$ *над многообразием* $\breve{X}_m$ *эквивалентно оснащению многообразия* $\breve{X}_m$ *полем подпространств* $\overset{c}{\tilde{\breve{E}}} = span(\overset{c}{\tilde{\breve{e}}}_{ij})$*, дополняющих касательные пространства* $T\breve{X}_m$ *до соприкасающихся пространств* $T^2\breve{X}_m$*:* $T\breve{X}_m \oplus \overset{c}{\tilde{\breve{E}}} = T^2\breve{X}_m$ [8, с. 49].

Для канонической связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^{i}_{jk} = -\breve{x}^{i}_{jk}$ имеем $\breve{\gamma}^{k}_{ij} = 0$, поэтому

$$\overset{c}{\tilde{\breve{e}}}_{[ij]} = 0,$$

$$\overset{c}{\tilde{\breve{e}}}_{(ij)} = \overset{*}{x}{}^{l}_{i}\overset{*}{x}{}^{k}_{j}(\partial_{lk} + N^{\xi}_{lk}\partial_{\xi}).$$

3. Равенство нулю ковариантных производных координат $\overset{*}{x}{}^{j}_{i}$ *векторов* $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^{j}_{i}\partial_j$ *выделяет каноническую аффинную связность. При этом базисные касательные векторы* ε_i *переносятся абсолютно параллельно относительно канонической связности.*

Действительно, внося формы связности в уравнения на m тензоров $\overset{*}{x}{}_i^1, \ldots, \overset{*}{x}{}_i^m$:

$$d\overset{*}{x}{}_i^j = \overset{*}{x}{}_k^j \breve{\omega}_i^k + \overset{*}{x}{}_l^j \breve{x}_{ik}^l \omega^k,$$

получим $d\overset{*}{x}{}_i^j - \overset{*}{x}{}_k^j \tilde{\breve{\omega}}_i^k = \overset{*}{x}{}_l^j \breve{\gamma}_{ik}^l \omega^k$, то есть ковариантный дифференциал $\breve{\nabla}\overset{*}{x}{}_i^j$ и ковариантные производные $\breve{\nabla}_k \overset{*}{x}{}_i^j$ координат $\overset{*}{x}{}_i^j$ векторов ε_i выражаются по формуле

$$\breve{\nabla}\overset{*}{x}{}_i^j = d\overset{*}{x}{}_i^j - \overset{*}{x}{}_k^j \tilde{\breve{\omega}}_i^k, \quad \breve{\nabla}_k \overset{*}{x}{}_i^j = \overset{*}{x}{}_l^j \breve{\gamma}_{ik}^l.$$

Равенство $\breve{\nabla}_k \overset{*}{x}{}_i^j = 0$ имеет место, если $\breve{\gamma}_{ik}^l = 0$, то есть векторы ε_i переносятся абсолютно параллельно в канонической связности.

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Петрова Л.И.* Кососимметричные дифференциальные формы: Законы сохранения. Основы теории поля. М., 2006.

3. *Полякова К.В.* Канонические аффинные связности первого и второго порядков // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2021. Т. 203. С. 71—83.

4. *Полякова К.В.* О расширении касательного пространства 2-го порядка гладкого многообразия // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 111—117.

5. *Полякова К.В.* О строении объекта аффинной связности и тензора кручения в расслоении линейных реперов // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 220. С. 99—112.

6. *Рыбников А.К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, №2. С. 279—290.

7. *Рыбников А.К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. №1. С. 73—80.

8. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.

9. *Belova O., Mikeš J., Sherkuziyev M., Sherkuziyeva N.* An analytical inflexibility of surfaces attached along a curve to a surface regarding a point and plane // Results in Mathematics. 2021. Vol. 76, №2. P. 56.

10. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory. Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10. Art. №46.

11. *Waldmann S.* Noncommutative field theories from a deformation point of view // Fauser B., Tolksdorf J., Zeidler E. (eds.). Quantum Field Theory. Basel, 2009.

12. *Witten E.* Supersymmetry and Morse theory // J. Diff. Geom. 1982. Vol. 17, №4. P. 661—692.

13. *Witten E.* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv:1009.6032v1 [hep-th].

Для цитирования: *Полякова К.В.* О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 29—44. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-3.

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

K. V. Polyakova

Immanuel Kant Baltic Federal University

14, A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia

polyakova_@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-3

On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor

Submitted on December 21, 2022

This paper relates to differential geometry, and the research technique is based on G. F. Laptev’s method of extensions and envelopments, which generalizes E. Cartan's method of moving frame and exterior forms.

A manifold is studied, the structure equations and derivational formulas of which are built using the deformations of the exterior and ordinary differentials. The manifold in question is a deformation of an ordinary smooth manifold. The bundles of non-symmetrical coframes and frames of the second order on this manifold are examined and an affine connection is given. It is proved that the curvature and torsion of this connection are not tensors. A canonical connection is built. It is shown that the canonical connectionis flat and non-symmetrical.

Keywords: differential perturbation, second order tangent space, non-symmetrical second order frames and coframes, torsion and curvature objects, flat and non-symmetrical connection

References

1. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

2. Petrova, L.I.: Skew-symmetric differential forms: Conservation laws. Fundamentals of field theory. Moscow (2006).

3. *Polyakova, K.V.:* Canonical affine connections of the first and second orders. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, **203**:2, 71—83 (2021).

4. *Polyakova, K.V.:* On some extension of the second order tangent space for a smooth manifold. DGMF, 53, 111—117 (2022).

5. *Polyakova, K.V.:* On the structure of an affine connection object and the torsion tensor in the bundle of linear frames. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, **220**, 99—112 (2023).

6. *Rybnikov, A.K.:* Affine connections of second order. Math. Notes, **29**:2, 143—149 (1981).

7. *Rybnikov, A.K.:* Second-order generalized affine connections. Izvestia vuzov. Math., **27**:1, 84—93 (1983).

8. *Shevchenko, Yu.I.:* Clothings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

9. *Belova, O., Mikeš, J., Sherkuziyev, M., Sherkuziyeva, N.:* An analytical inflexibility of surfaces attached along a curve to a surface regarding a point and plane. Results in Math., **76**:2, 56 (2021).

10. *Petrova, L.:* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation. Axioms, **10**:46 (2021).

11. *Waldmann, S.:* Noncommutative field theories from a deformation point of view. Fauser, B., Tolksdorf, J., Zeidler, E. (eds.). Quantum Field Theory. Basel (2009).

12. *Witten, E.:* Supersymmetry and Morse theory. J. Diff. Geom., **17**:4, 661—692 (1982).

13. *Witten, E.:* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv:1009.6032v1 [hep-th].

For citation: Polyakova, K. V. On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 54 (2), 29—44 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-3.