П р е д л о ж е н и е 5. Конус Π_ℓ является множеством точек стационарности отображения $\varphi_q|_\ell$.

Итак, формула (I8) каждому $\ell \in B$ ставит в соответствие конус стационарности для слоя над ℓ, т.е. имеется (n-I)-мерное семейство конусов стационарности.

П р е д л о ж е н и е 6. Семейство конусов стационарности отображения φ_q определяет множество χ характеристических прямых отображения f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В семействе (I8) n конусов $\Pi^T_{\gamma x} X^\gamma X^x = 0$ образуют базис. Доказываемое утверждение теперь вытекает из формулы (I.II)[6], задающей характеристические направления отображения f.

Библиографический список

I. А н д р е е в Б.А. К теории точечных отображений//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград, I989.Вып.20.С.9-I4.

2. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, I987.Вып.I8.С.5-9.

3. А н д р е е в Б.А. Некоторые типы характеристической конфигурации отображения f //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, I980.Вып.II.С.3-6.

4. Ч е х Э. Проективно-дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами.I//Чехосл.матем.ж.I952. V. 2.№I.С.9I-I07.

5. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами//Геометрия, I963.Итоги науки/ВИНИТИ.М., I965. С.65-I07.

6. П а в л ю ч е н к о Ю.В., Рыжков В.В. Об изгибании точечных соответствий между пространствами//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М., I969. Т.2.С.263-275.

7. Vranceanu G., Sul tensore associato ad corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. V.12. N4. P.489-506.

УДК 514.755.5

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЯТИМЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P^5

И.В.Б у б я к и н

(Московский институт стали и сплавов)

I. Рассмотрим пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей L в проективном пространстве P^5, т.е. пятимерный комплекс K. Свяжем с плоскостью L семейство точечных проективных реперов, образованных точками A_J ($I, J = 0, \ldots, 5$), так, чтобы точки A_i ($i, j = 0, 1, 2$) лежали в плоскости L. Обозначим через ω^J_I линейные дифференциальные формы, определяющие перемещение точечного репера. Перемещение плоскости $L = [A_0, A_1, A_2]$ в пространстве P^5 будут определять формы ω^p_i ($p, q = 3, 4, 5$). Поскольку плоскость L зависит от пяти параметров, то среди этих форм лишь пять линейно независимых. Поэтому комплекс K определяется четырьмя независимыми уравнениями

$$\Lambda^{\alpha i}_p \omega^p_i = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \qquad (I)$$

Через каждую плоскость L комплекса K проходит в общем случае шесть его торсов [1]. Эти торсы находятся из условия [2]:

$$rang(\omega^p_i) = 1, \qquad (2)$$

где формы ω^p_i удовлетворяют уравнениям (I). Условие (2) эквивалентно параметрическим уравнениям

$$\omega^p_i = a_i x^p dt. \qquad (3)$$

Пусть M - произвольная точка плоскости L, тогда $M = x^i A_i$. Дифференциал этой точки в силу (3) записывается в виде

$$dM = (dx^i + x^j \omega^i_j) A_i + (a_i x^i)(x^p A_p) dt. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что прямая, определяемая в плоскости L уравнением $a_i x^i = 0$, является характеристической прямой торса (3), а трехмерная плоскость $[A_0, A_1, A_2, x^p A_p]$ - касательной 3-плоскостью к этому торсу.

Из уравнений (1) в силу (3) получим

$$\Lambda^{\alpha i}_p a_i x^p = 0. \qquad (5)$$

Эта система определяет трехмерную касательную плоскость к торсу, если

$$rang(\Lambda^{\alpha i}_p a_i) = 2. \qquad (6)$$

Из условия (6) находятся тангенциальные координаты характеристических прямых на плоскости L.

2. Точка M плоскости L называется особой, если при изменении всех параметров комплекса она описывает некоторую поверхность [3]. Будем считать точку A_0 плоскости L неособой. В этом случае формы ω^p_0 являются линейно независимыми и их можно включить в число базисных форм комплекса. Дополним их до базиса комплекса независимыми θ^k ($k, \ell = 1, 2$). Тогда из уравнений (I) получаем параметрические уравнения комплекса в виде

$$\omega^p_k = \lambda^p_{kq} \omega^q_0 + \lambda^p_{k\ell} \theta^\ell. \qquad (7)$$

денные отображением f для пары (P, p). Рассмотрим порожденные отображением f композиции

$$\varphi_q = f_q \circ \gamma_q^{-1}: \quad Q \in \mathcal{H}(P) \longmapsto \varphi_q(Q) \in \mathcal{H}(P),$$

$$\hat{\varphi}_q = \gamma_q^{-1} \circ f_q: \quad q \in \mathcal{H}(p) \longmapsto \hat{\varphi}_q(q) \in \mathcal{H}(p).$$

Они являются преобразованиями многообразий гиперквадрик $\mathcal{H}(P)$ и $\mathcal{H}(p)$. Из (13),(6) и (7) получаем для φ_q:

$$\tilde{A}_\jmath = A_\jmath, \quad \tilde{A}_{\jmath\varkappa} = A_{\jmath\varkappa} + A_{(\jmath}\gamma_{\varkappa)} - \Gamma^T_{\jmath\varkappa} A_T, \qquad (14)$$

где

$$\Gamma^T_{\jmath\varkappa} = V^T_i \Lambda^i_{\jmath\varkappa}, \qquad (15)$$

а $\tilde{A}_\jmath, \tilde{A}_{\jmath\varkappa}$ – координаты гиперквадрики $\varphi_q(Q)$.

5. Рассмотрим объект

$$\Pi^T_{\jmath\varkappa} = \Gamma^T_{\jmath\varkappa} - \delta^T_{(\jmath}\gamma_{\varkappa)} \qquad (16)$$

проективно-евклидовой связности Г.Врэнчану [6],[7]. Имеем

$$\overset{\circ}{\nabla} \Pi^T_{\jmath\varkappa} = 0. \qquad (17)$$

Тензор $\Pi = \{\Pi^T_{\jmath\varkappa}\}$ каждой гиперплоскости $b \in B$ ставит в соответствие конус 2-го порядка Π_b:

$$A_T \Pi^T_{\jmath\varkappa} X^\jmath X^\varkappa = 0 \qquad (18)$$

с вершиной в точке P. Конус Π_b тесно связан с геометрией отображения φ_q.

О п р е д е л е н и е 1. Конус Π_b называется конусом стационарности отображения φ_q для слоя над b.

Из (14) вытекает, что преобразование φ_q сохраняет слой над b. Для пересечения $Q \cap \varphi_q(Q)$, где $Q \in \mathcal{H}(P, b)$, из (14) после преобразований получаем:

$$A_{\jmath\varkappa} X^\jmath X^\varkappa + 2 A_\jmath X^\jmath X^0 = 0, \quad A_T \Pi^T_{\jmath\varkappa} X^\jmath X^\varkappa = 0. \qquad (19)$$

О п р е д е л е н и е 2. Точка $A \in P_n$ называется точкой стационарности отображения $\varphi_p|_b$, если из $A \in Q$ вытекает $A \in \varphi_q|_b(Q)$.

Из (19) следуют два утверждения.

П р е д л о ж е н и е 4. Для любого $Q \in \mathcal{H}(P, b)$ пересечение $Q \cap \varphi_q(Q)$ является частью конуса стационарности для слоя над b.

Точка B будет описывать некоторую двумерную поверхность V при всевозможных перемещениях прямолинейной образующей поверхности PC, если

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x^k\lambda^3_k & x^k\lambda^4_k & x^1\lambda^5_1 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} = 1.$$

Предположим, что $\det(\lambda^\tau_k) \neq 0$ (случай, когда $\det(\lambda^\tau_k) = 0$ приводит к результату, содержащемуся в теореме 2). Тогда из этого условия находим единственную точку A_1, описывающую двумерную поверхность V. Дифференциал этой точки в силу (10) определяется так: $dA_1 = \omega^1_1 A_1 + \omega^2_1 A_2 + \theta(\lambda^\rho_1 A_\rho)$. Отсюда видно, что плоскость $[A_1, A_2, \lambda^\rho_1 A_\rho]$ будет касательной к двумерной поверхности V. Поместим вершину A_5 репера в эту касательную плоскость. Тогда получим, что $\lambda^\tau_1 = 0$ и уравнения двумерной поверхности V запишется в виде

$$\omega^\tau_1 = 0. \qquad (11)$$

Докажем теперь обратное утверждение. Предположим, что прямолинейные образующие поверхности PC касаются некоторой двумерной поверхности V. Совместим точку A_0 с вершиной гиперконуса C. Тогда уравнения поверхности PC можно привести к виду (8). Далее, совместим вершину A_1 репера с текущей точкой двумерной поверхности V. В касательную плоскость к этой двумерной поверхности поместим вершину A_5. В силу чего уравнения поверхности V примут вид (11). Уравнения (11) выполняются на комплексе K при фиксированной точке A_0. Для произвольных перемещений точки A_0 на комплексе K будут выполняться уравнения $\omega^\tau_1 = \lambda^\tau_{1\rho}\omega^\rho_0$. В силу этих уравнений условие (6) запишется в виде

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \lambda^3_{13}a_0 - a_1 & \lambda^4_{13}a_0 & \Lambda^{3i}_3 a_i & \Lambda^{4i}_3 a_i \\ \lambda^3_{14}a_0 & \lambda^4_{14}a_0 - a_1 & \Lambda^{3i}_4 a_i & \Lambda^{4i}_4 a_i \\ \lambda^3_{15}a_0 & \lambda^4_{15}a_0 & \Lambda^{3i}_5 a_i & \Lambda^{4i}_5 a_i \end{pmatrix} = 2.$$

Отсюда видно, что этому условию удовлетворяют тангенциальные координаты $a_0 = a_1 = 0$, определяющие характеристическую прямую $[A_0, A_1]$. Точка A_0, являющаяся вершиной гиперконуса C, принадлежит этой прямой. Теорема доказана. Аналогично доказывается

Т е о р е м а 2. Через вершину гиперконуса C проходят две характеристические прямые плоскости L, и при этом трехмерные касательные плоскости к соответствующим торсам различны тогда и только тогда, когда для этой точки поверхность PC является тангенциально вырожденной ранга два.

Библиографический список

1. Room T.G. The geometry of determinantal loci. Cambridge, 1938. 438 p.

2. А к и в и с М.А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия// Tensor. 1982. V.38. P.273-282.

3. К р у г л я к о в Л.З., Мизин А.Г. Допустимые комплексы коразмерности два многомерных плоскостей проективного пространства//Сиб.ж. 1986.Т.27.№5.С.110-115.

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ СЕТЯХ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ПСЕВДОФОКУСАМ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ V_2 В E_4

В.И.Г л и з б у р г

(Московский государственный педагогический институт)

Многообразие M_p погружено в виде поверхности в евклидово n-пространство $(n>p)$. Существуют различные конструктивные способы задания сети линий на этой поверхности. В работе рассмотрены способы построения сети линий на поверхности V_2 евклидова пространства E_4 при помощи псевдофокусов оснащающей и дополнительной нормалей, а также изучена связь свойств псевдофокусов нормалей со свойствами сети, их порождающей.

Отнесем гладкую поверхность V_2 в E_4 к подвижному реперу $R^A=\{A,\vec e_i,\vec e_\alpha\}$, в котором $A\in V_2$, $\vec e_i\in T_2(A)$, $\vec e_\alpha$ -составляют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_2(A)$ касательного пространства $T_2(A)$ поверхности V_2 в точке A. Здесь и далее индексы принимают следующие значения: $i,j=1,2$; $\alpha,\beta=3,4$; $\mathcal{I},\mathcal{J}=1,4$. Деривационные формулы такого репера имеют вид:

$$d\vec A=\omega^i\vec e_i;\quad d\vec e_i=\omega_i^j\vec e_j+\omega_i^\alpha\vec e_\alpha;\quad d\vec e_\alpha=\omega_\alpha^i\vec e_i+\omega_\alpha^\beta\vec e_\beta.$$

Поверхность V_2 относительно репера R^A определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^\alpha=0$, продолжая которую имеем

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j,\quad b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha. \qquad (1)$$

Зададим на поверхности V_2 поле одномерной нормали (оснащающая нормаль). Задание поля нормали определяет на поверхности сеть Σ_2 линий кривизны относительно этой нормали [3],[2]. Выберем ортонормированный базис $\{\vec e_\alpha\}$ в плоскости $N_2(A)$ так, что вектор $\vec e_{\alpha_0}$ (α_0 -фиксированно) направлен вдоль оснащающей нормали. Единичные векторы $\vec e_i$

репера R^A направим по касательным к линиям кривизны относительно оснащающей нормали $[A,\vec e_{\alpha_0}]$. Тогда, как показано в [2], имеет место:

$$b_{ij}^{\alpha_0}=b_{ji}^{\alpha_0}=0. \qquad (2)$$

В силу ортонормированности репера R^A имеем

$$\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}}=-\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}},\quad \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{I}}=0. \qquad (3)$$

1. Рассмотрим на поверхности V_2 в E_4, отнесенной к сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали, произвольную сеть Σ_2^*, образованную интегральными кривыми векторных полей $\vec b_i$:

$$\vec b_1=\vec e_1+\mu_1\vec e_2,\quad \vec b_2=\mu_2\vec e_1+\vec e_2\quad (\vec b_1\nparallel\vec b_2), \qquad (4)$$

где μ_i -некоторые гладкие функции точки поверхности. Очевидно, что, положив в (4) $\mu_1=\mu_2=0$, получим векторные поля $\vec b_i$:

$$\vec b_1=\vec e_1,\quad \vec b_2=\vec e_2\quad (\vec b_1\nparallel\vec b_2), \qquad (4')$$

определяющие сеть Σ_2.

О п р е д е л е н и е. Псевдофокусом нормали $[A,\vec e_\alpha]$ относительно сети Σ_2^* назовем такую точку $F_\alpha^i\in[A,\vec e_\alpha]$, смещение которой при смещении точки A в направлении $\vec b_i$ не выходит из 3-плоскости $P_3(A)=[A,\vec b_j,\vec e_\alpha]$, $i\neq j$.

Если $\vec F_\alpha^i=\vec A+\lambda_\alpha^i\vec e_\alpha$, то $d\vec F_\alpha^i\in P_3(A)$ тогда и только тогда, когда $\omega^i+\lambda_\alpha^i\omega_\alpha^i-\mu_j(\omega^i\mu_i+\lambda_\alpha^i\omega_\alpha^j)=0$ ($i\neq j$; по i,j -нет суммирования). Учитывая формулы (1) и (3), на каждой из указанных нормалей получаем по два псевдофокуса относительно заданной сети Σ_2^* с координатами:

$$\lambda_\alpha^i=\frac{\mu_i\mu_j-1}{\mu_i\mu_j b_{jj}^\alpha-b_{ii}^\alpha+(\mu_j-\mu_i)b_{ij}^\alpha}\quad (i\neq j). \qquad (5)$$

З а м е ч а н и е 1. Из (4) и (5) следует, что псевдофокусы оснащающей (дополнительно) нормали относительно сети Σ_2 совпадают тогда и только тогда, когда выполняется условие: $b_{11}^{\alpha_0}=b_{22}^{\alpha_0}$ ($b_{11}^\alpha=b_{22}^\alpha$, $\alpha\neq\alpha_0$).

Рассмотрим вектор нормальной кривизны $\vec K_n$ произвольной кривой γ на поверхности V_2 в точке A: $\vec K_n(\gamma)=\frac{1}{ds^2}\cdot\omega^i\omega^j b_{ij}^\alpha\vec e_\alpha$, где s -натуральный параметр кривой γ. Полагая в формуле (5) $\alpha=\alpha_0$, учитывая условие (2) и замечание 1, получим следующие утверждения:

Т е о р е м а 1. В некоторой окрестности точки поверхности $V_2\subset E_4$ следующие условия эквивалентны: 1) $b_{11}^{\alpha_0}=b_{22}^{\alpha_0}$; 2) псевдофокусы оснащающей нормали совпадают; 3) псевдофокусы оснащающей нормали относительно любой сети совпадают; 4) проекции векторов нормальных кривизн линий сети Σ_2 на оснащающую нормаль равны.