ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 11 1980

Ю.И. Попов

ОБ ИНВАРИАНТНОМ ОСНАЩЕНИИ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА РАСПАДАЮЩИХСЯ ГИПЕРПОЛОС CH_m^τ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В проективном пространстве P_n рассматриваются вырожденные распадающиеся гиперполосы CH_m^τ [1], несущие сильно сопряженную сеть [2]. Даны дифференциальные уравнения таких гиперполос. В дифференциальной окрестности второго порядка образующего элемента гиперполосы CH_m^τ внутренним инвариантным образом присоединены оснащающие плоскости $E_{\tau-1}, \Pi_{n-\tau}; E_{s-1}; \Pi_{n-s}$ $(s=m-\tau)$; $E_{m+1}; \Pi_{n-m-2}$ и дана их геометрическая интерпретация.

Во всей работе мы придерживаемся обозначений работы [1], а также следующей схемы использования индексов: $p,q,t,s\ldots=1,2,\ldots,\tau;\ i,j,k,\ell\ldots=\tau+1,\tau+2,\ldots,m;$ $\alpha,\beta,\gamma,\ldots=m+1,m+2,\ldots,n-1;\ \mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\ldots=0,1,2,\ldots,n.$

1. Рассмотрим вырожденную распадающуюся гиперполосу CH_m^τ ранга τ [1] проективного пространства P_n. Зададим на направляющей поверхности V_τ базисной поверхности V_m^τ гиперполосы CH_m^τ сеть Σ_τ, то есть τ семейств линий таких, что через каждую точку поверхности V_τ проходит по одной и только по одной линии из каждого семейства [3]. В этом случае будем говорить, что сеть Σ_τ задана на рассматриваемой гиперполосе CH_m^τ.

Присоединим к гиперполосе CH_m^τ проективный репер $\{A_\mathcal{J}\}$ так, чтобы точка A_0 совпала с текущей точкой поверхности V_τ, точки $\{A_p\}$ лежали в касательной плоскости T_τ к поверхности V_τ на касательных к линиям сети Σ_τ, точки $\{A_\alpha\}$ - в плоской образующей E_{n-m-1} тангенциально вырожденной поверхности V_{n-s-1}^τ, точки $\{A_i\}$ - в плоской образующей E_s базисной поверхности $V_m^\tau \subset CH_m^\tau$, а точка A_n пусть занимает произвольное положение.

Наряду с точечным подвижным репером $\{A_\mathcal{J}\}$ рассмотрим двойственный ему тангенциальный репер $\{\tau^\mathcal{K}\}$, элементы которого являются гранями репера $\{A_\mathcal{J}\}$.

Так как регулярная гиперполоса H_τ, ассоциированная с вырожденной распадающейся гиперполосой CH_m^τ, сама себе двойственна, то сеть Σ_τ имеет двойственный образ $\overline{\Sigma}_\tau$, который будем называть тангенциальной сетью [2]. Тангенциальная сеть $\overline{\Sigma}_\tau \subset CH_m^\tau$ представляет собой τ систем однопараметрических подсемейств гиперплоскостей τ таких, что любая гиперплоскость $\tau \subset CH_m^\tau$ содержится в одном однопараметрическом подсемействе каждой системы, причем в гиперплоскости τ τ характеристик рассматриваемых однопараметрических подсемейств гиперплоскостей пересекаются по образующей $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V_{n-1}^τ. Пусть сеть $\Sigma_\tau \subset CH_m^\tau$ является сильно сопряженной [2].

В частично канонизированном репере первого порядка распадающаяся гиперполоса CH_m^τ с заданной на ней сильно сопряженной сетью Σ_τ задается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_0^n=0,\quad \omega_0^i=0,\quad \omega_0^\alpha=0,\quad \omega_i^n=0,\\ &\omega_\alpha^n=0,\quad \omega_i^\alpha=0,\quad \omega_\alpha^i=0; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega_p^n=a_{pp}\,\omega^p,\quad \omega_i^p=b_i^{pp}\,\omega_p^n,\quad \omega_p^i=b_{pp}^i\,\omega^p,\\ &\omega_\alpha^p=b_\alpha^{pp}\,\omega_p^n,\quad \omega_p^\alpha=b_{pp}^\alpha\,\omega^p; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\omega_p^q=\sum_t a_{pt}^q\,\omega^t,\quad p\neq q; \tag{3}$$

$$\omega_q^p=\sum_t a_q^{pt}\,\omega_t^n,\quad p\neq q, \tag{4}$$

где по индексам p, q, t суммирование не производится, если на то не указывает знак $\sum$. Согласно [2],[3] уравнению (3) определяют сеть $\Sigma_\tau \subset CH_m^\tau$, а уравнению (4) задают тангенциальную сеть $\overline{\Sigma}_\tau \subset CH_m^\tau$, причем

$$a_q^{pt} = a_{qs}^p\, \overset{*}{a}{}^{st}, \quad p \neq q. \tag{5}$$

Коэффициенты в уравнениях (2)-(4) при фиксированных главных параметрах (при $\omega_o^p = 0$) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\delta a_{pp} - a_{pp}\,(2\pi_p^p - \pi_o^o) + a_{pp}\pi_n^n = 0,$$

$$\delta b_i^{pp} + b_i^{pp}(2\pi_p^p - \pi_n^n) - b_j^{pp}\pi_i^j - a^{pp}\pi_i^o = 0,$$

$$\delta b_{pp}^i - b_{pp}^i(2\pi_p^p - \pi_o^o) + b_{pp}^j\pi_j^i + a_{pp}\pi_n^i = 0,$$

$$\delta b_\alpha^{pp} + b_\alpha^{pp}(2\pi_p^p - \pi_n^n) - b_\beta^{pp}\pi_\alpha^\beta - a^{pp}\pi_\alpha^o = 0,$$

$$\delta b_{pp}^\alpha - b_{pp}^\alpha(2\pi_p^p - \pi_o^o) + b_{pp}^\beta\pi_\beta^\alpha + a_{pp}\pi_n^\alpha = 0,$$

$$\delta a_{pp}^q + a_{pp}^q(\pi_o^o + \pi_q^q - 2\pi_p^p) + a_{pp}\pi_n^q = 0,$$

$$\delta a_{pq}^q + a_{pq}^q(\pi_o^o - \pi_p^p) - \pi_p^o = 0,$$

$$\delta a_{pt}^q + a_{pt}^q(\pi_o^o - \pi_p^p - \pi_t^t + \pi_q^q) = 0,$$

$$\delta a_q^{pp} + a_q^{pp}(2\pi_p^p - \pi_n^n - \pi_q^q) - a^{pp}\pi_q^o = 0,$$

$$\delta a_q^{pq} + a_q^{pq}(\pi_p^p - \pi_n^n) + \pi_n^p = 0,$$

$$\delta a_q^{pt} + a_q^{pt}(\pi_p^p + \pi_t^t - \pi_n^n - \pi_q^q) = 0,$$

где индексы p, q, t принимают различные значения.

II. Построим ряд инвариантных оснащающих плоскостей, внутренним образом присоединенных к гиперполосе CH_m^τ, несущей сильно сопряженную сеть Σ_τ:

а/ Инвариантную нормаль I-го рода гиперполосы CH_m^τ $(n-m)$-плоскость $N_{n-m} = [\sigma^p, \sigma^i]$ -зададим как пересечение гиперплоскостей $\sigma^p = \tau^p + y^p\tau^n$, $\sigma^i = \tau^i + y^i\tau^n$. Гиперплоскости $\{\sigma^p\}$ определяют инвариантную $(n-\tau)$-плоскость $\Pi_{n-\tau} \not\subset \tau^n$, содержащую плоскую образующую $E_{n-\tau-1} = [A_o, A_i, A_\alpha]$ тангенциально вырожденной гиперповерхности V_{n-1}^τ. Гиперплоскости $\{\sigma^i\}$ определяют инвариантную $(n-s)$-плоскость $\Pi_{n-s} \not\subset \tau^n$, содержащую касательную плоскость E_{n-s-1} тангенциально вырожденной поверхности V_{n-s-1}^τ [1].

б/ Инвариантную нормаль второго рода гиперполосы CH_m^τ — $(m-1)$-плоскость $N_{m-1} = [M_p, M_i]$ -определим точками $M_p = A_p + x_p A_o$ и $M_i = A_i + x_i A_o$. Точки $\{M_p\}$ определяют инвариантную плоскость $E_{\tau-1}$, лежащую в касательной плоскости T_τ к поверхности V_τ. Точки $\{M_i\}$ определяют инвариантную плоскость E_{s-1}, лежащую в плоской образующей E_s базисной поверхности V_m^τ гиперполосы CH_m^τ.

в/ Кроме основных элементов оснащения гиперполосы CH_m^τ -ее нормалей I-го и II-го родов- определим еще инвариантную плоскость $E_{m+1} = [\sigma^\alpha = \tau^\alpha + y^\alpha\tau^n]$, проходящую через касательную плоскость T_n поверхности V_m^τ, причем $E_{m+1} \not\subset \tau^n$, и $(n-m-2)$-плоскость $\Pi_{n-m-2} = [M_\alpha = A_\alpha + x_\alpha A_o]$, принадлежащую плоской образующей $E_{n-m-1} = [A_o, M_\alpha]$ тангенциально вырожденной поверхности $V_{n-s-1}^\tau \subset CH_m^\tau$.

Оснащающие объекты $\{y^p\}, \{y^i\}, \{x_p\}, \{x_i\}, \{y^\alpha\}, \{x_\alpha\}$ удовлетворяют соответственно следующим дифференциальным уравнениям (при фиксированных главных параметрах):

$$\delta y^p + y^p(\pi_p^p - \pi_n^n) - \pi_n^p = 0, \tag{7}$$

$$\delta y^i + y^j \pi_j^i - y^i \pi_n^n - \pi_n^i = 0, \tag{8}$$

$$\delta x_p + x_p(\pi_0^0 - \pi_p^p) + \pi_p^0 = 0, \tag{9}$$

$$\delta x_i + x_i \pi_0^0 - x_j \pi_i^j + \pi_i^0 = 0, \tag{10}$$

$$\delta y^\alpha - y^\alpha \pi_n^n + y^\beta \pi_\beta^\alpha - \pi_n^\alpha = 0, \tag{11}$$

$$\delta x_\alpha + x_\alpha \pi_0^0 - x_\beta \pi_\alpha^\beta + \pi_\alpha^0 = 0. \tag{12}$$

Построены охваты оснащающих объектов в дифференциальной окрестности второго порядка образующего элемента гиперполосы CH_m^τ, несущей сильно сопряженную сеть:

$$y^p = -\ell^p, \quad \ell^p = \frac{1}{\tau-1}\sum_{q\neq p} a_q^{pq}, \tag{13}$$

$$y^i = -\Lambda^i, \quad \Lambda^i = \frac{1}{\tau}\sum_p a^{pp} b_{pp}^i, \tag{14}$$

$$x_p = -\ell_p, \quad \ell_p = \frac{1}{\tau-1}\sum_{q\neq p} a_{pq}^q, \tag{15}$$

$$x_i = -\Lambda_i, \quad \Lambda_i = \frac{1}{\tau}\sum_p a_{pp} b_i^{pp}, \tag{16}$$

$$y^\alpha = -\Lambda^\alpha, \quad \Lambda^\alpha = \frac{1}{\tau}\sum a^{pp} b_{pp}^\alpha, \tag{17}$$

$$x_\alpha = -\Lambda_\alpha, \quad \Lambda_\alpha = \frac{1}{\tau}\sum a_{pp} b_\alpha^{pp}. \tag{18}$$

Т е о р е м а I. Инвариантные оснащающие плоскости E_{s-1} и Π_{n-s}; $E_{\tau-1}$ и $\Pi_{n-\tau}$; E_{m+1} и Π_{n-m-2} (попарно двойственны друг другу) внутренним инвариантным образом присоединяются в дифференциальной окрестности второго порядка образующего элемента распадающейся гиперполосы CH_m^τ, несущей сильно сопряженную сеть.

III. Рассматривая фокальные образы, связанные с распадающейся гиперполосой CH_m^τ, несущей сильно сопряженную сеть, мы приходим к результатам работы [1], где дана геометрическая интерпретация плоскостей $E_{s-1}, \Pi_{n-s}, E_{m+1}, \Pi_{n-m-2}$. Кроме того, имеют место следующие предложения:

Т е о р е м а 2. Плоскость $E_{\tau-1} = [A_p - \ell_p A_0]$ является гармонической полярой (гармонической плоскостью) точки A_0 относительно сильно сопряженной сети $\Sigma_\tau \subset CH_m^\tau$. Плоскость $\Pi_{n-\tau} = [\sigma^p = \tau^p - \ell^p \tau^n]$ является гармонической полярой (гармонической плоскостью) гиперплоскости τ^n относительно сильно сопряженной сети $\overline{\Sigma}_\tau \subset CH_m^\tau$.

Т е о р е м а 3. Поля гармонических плоскостей $E_{\tau-1}$ $(\Pi_{n-\tau})$ сильно сопряженной сети $\Sigma_\tau \subset CH_m^\tau$ $(\overline{\Sigma}_\tau \subset CH_m^\tau)$ нормализуют данную гиперполосу CH_m^τ двойственным внутренне инвариантным образом.

Список литературы

1. П о п о в Ю.И. О полях геометрических объектов многомерной распадающейся гиперполосы проективного пространства.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8, Калининград, 1977, с. 43-70.

2. С т о л я р о в А.В. О двойственной геометрии сетей на регулярной гиперполосе.- Изв. вузов. Матем., 1977, № 8, с. 68-78.

3. Б а з ы л е в В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.- Изв. вузов. Матем., 1966, № 2, с. 9-19.