6. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Казань, 1965. С. 5 – 179.
7. *Игошин В.А., Китаева Е.К.* Об аффинных симметриях квазигеодезических потоков // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С. 49 – 52.
8. *Они же*. Максимально подвижные квадратичные квазигеодезические потоки ненулевой кривизны // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 2002. Вып. 33. С. 41 – 44.

V. Igoshin, E. Kitaeva

ABOUT GEOMETRICAL CHARACTERISTICS
OF THE QUADRATIC QUASIGEODESIC FLOWS

As application of geometrical modelling [1] a series of results about mobility and geometrical characteristics of quadratic quasigeodesic flows (QF) with nonzero curvature it is received. In particular, it is proved the following

Theorem 4. *In order that a QF (M, f) with nonzero curvature have a maximal mobility, it is necessary and sufficient that the QF be projectively Euclidean and its events space have admits exactly n-1 of linearly independent vector fields of absolute parallelism (n = dimM >3).*

УДК 514.76

В.А. Игошин, Н.В. Коткова
(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)*

О ПРОЕКТИВНО РИМАНОВЫХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

С помощью пульверизационного моделирования [1; 2] и результатов [3] получены теоремы о существовании римановой связности, проективно эквивалентной заданной симметричной аффинной связности, а также связности одномерного квазигеодезического потока (КП).

1. Пусть M – двумерное многообразие. На M задана произвольная симметричная аффинная связность $\overline{\Gamma}$ коэффициентами $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^{\delta})$

($1 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \le 2$). Выясним, когда среди связностей, проективно эквивалентных $\overline{\Gamma}$, существует риманова связность Γ.

Искомая риманова метрика $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^{\delta})$ является решением системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha} g_{\sigma\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} g_{\alpha\sigma}. \tag{1}$$

Система (1), очевидно, всегда интегрируема и множество ее решений – наборов функций $(g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22})$ – образует вещественное векторное пространство. Условия полной интегрируемости (1) имеют вид:

$$g_{\sigma\alpha} R^{\sigma}{}_{\gamma\delta\beta} + g_{\sigma\beta} R^{\sigma}{}_{\gamma\delta\alpha} = 0, \tag{2}$$

где $R^{\sigma}_{\gamma\delta\beta} = \partial_{\delta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} - \partial_{\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\delta\beta} + \Gamma^{\chi}_{\gamma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\delta\chi} - \Gamma^{\chi}_{\delta\beta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\chi}$ – тензор кривизны связности Γ.

Тензоры кривизны $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ и $\overline{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ проективно эквивалентных связностей Γ и $\overline{\Gamma}$ удовлетворяют соотношениям (см.[5, с. 537]):

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \overline{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{\gamma\delta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\psi_{\beta\delta} + \delta^{\alpha}_{\delta}(\psi_{\gamma\beta} - \psi_{\beta\gamma}), \tag{3}$$

где

$$\psi_{\gamma\delta} = \nabla_{\gamma}\psi_{\delta} - \psi_{\gamma}\psi_{\delta}, \tag{4}$$

абсолютная производная ∇_{γ} берется на базе связности $\overline{\Gamma}$.

Существенно различные координаты тензора $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ можно записать так:

$$\begin{cases} R^{1}_{1} = \overline{R}^{1}_{1} + 2\psi_{21} - \psi_{12},\ R^{2}_{1} = \overline{R}^{2}_{1} - \psi_{11}, \\ R^{1}_{2} = \overline{R}^{1}_{2} + \psi_{22},\ R^{2}_{2} = \overline{R}^{2}_{2} - 2\psi_{12} + \psi_{21}, \end{cases} \tag{5}$$

где использованы сокращенные обозначения $R^{\alpha}_{12\beta} = R^{\alpha}_{\beta}$.

Полученные уравнения всегда совместны относительно $\psi_{\alpha\beta}$, следовательно, тензор кривизны всегда можно представить в виде (3).

Из условий (2) следует, что система уравнений (1) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда тензор кривизны римановой связности Γ равен нулю: $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$ – и, учитывая соотношения (3),

$$\overline{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{\gamma\delta} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\psi_{\beta\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}(\psi_{\gamma\beta} - \psi_{\beta\gamma}).$$

Согласно работе [5, с. 540], при $n = 2$ последнее условие выполняется для любого тензора кривизны, так что необходимым и достаточным условием проективной евклидовости связности $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ являются лишь следующие соотношения:

$$\nabla_2(2\overline{R}^2_2 - \overline{R}^1_1) + 3\nabla_1\overline{R}^1_2 = 0,\ \nabla_1(2\overline{R}^1_1 - \overline{R}^2_2) + 3\nabla_2\overline{R}^2_1 = 0. \qquad (6)$$

Подставляя соотношения (5) в условия теоремы 2 [3, с. 12] и используя соотношения (6), получаем, что справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы симметричная аффинная связность* $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *была проективно эквивалентна римановой связности* $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\psi_{\delta}$ *на плоскости, необходимо, чтобы выполнялось одно из следующих взаимоисключающих друг друга условий:*

$$1)\begin{cases}\nabla_2(2\overline{R}^2_2 - \overline{R}^1_1) + 3\nabla_1\overline{R}^1_2 = 0,\\ \nabla_1(2\overline{R}^1_1 - \overline{R}^2_2) + 3\nabla_2\overline{R}^2_1 = 0,\end{cases} \qquad 2)\begin{cases}\overline{R}^1_1 + 2\psi_{21} - \psi_{12} = 0,\\ \overline{R}^2_2 - 2\psi_{12} + \psi_{21} = 0,\\ \overline{R}^1_2 \neq -\psi_{22},\\ \overline{R}^2_1 \neq \psi_{11},\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}\overline{R}^1_1 + \overline{R}^2_2 \neq 3(\psi_{12} - \psi_{21}),\\ \overline{R}^1_2 = -\psi_{22},\\ \overline{R}^2_1 \neq \psi_{11},\end{cases} \qquad 4)\begin{cases}\overline{R}^1_1 + \overline{R}^2_2 \neq 3(\psi_{12} - \psi_{21}),\\ \overline{R}^1_2 \neq -\psi_{22},\\ \overline{R}^2_1 = \psi_{11},\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}\overline{R}^1_1 + \overline{R}^2_2 \neq 3(\psi_{12} - \psi_{21}),\\ \overline{R}^1_2 = -\psi_{22},\\ \overline{R}^2_1 = \psi_{11},\end{cases} \qquad 6)\begin{cases}\overline{R}^1_1 + \overline{R}^2_2 \neq 3(\psi_{12} - \psi_{21}),\\ \overline{R}^1_2 \neq -\psi_{22},\\ \overline{R}^2_1 \neq \psi_{11},\end{cases}$$

в которых $\psi_{\gamma\delta} = \nabla_{\gamma}\psi_{\delta} - \psi_{\gamma}\psi_{\delta}$, *причем абсолютная производная* ∇_{γ} *берется на базе связности* $\overline{\Gamma}$.

Замечание. Условие 1 теоремы 1 является также достаточным условием.

Теорема 2. *При выполнении одного из взаимоисключающих друг друга условий 2 – 6 теоремы 1 искомая метрика в соответствующих случаях (если существует подходящее решение системы (1)) необходимо имеет вид*

2) $g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{11} = -\left(\overline{R}^2_1 - \psi_{11}\right)g_{22}/\left(\overline{R}^1_2 + \psi_{22}\right)$, *где* $g_{22} \neq 0$, *причем метрика собственно риманова, если* $\left(\overline{R}^2_1 - \psi_{11}\right)/\left(\overline{R}^1_2 + \psi_{22}\right) < 0$, *и псевдориманова, если* $\left(\overline{R}^2_1 - \psi_{11}\right)/\left(\overline{R}^1_2 + \psi_{22}\right) > 0$;

3) $g_{22}=0$, $g_{11}=-\left(\overline{R}_1^2-\psi_{11}\right)g_{12}/\left(\overline{R}_1^1+2\psi_{21}-\psi_{12}\right)$, $g_{12}\neq 0$ *(псевдориманова);*

4) $g_{11}=0$, $g_{12}=\left(\overline{R}_1^1+2\psi_{21}-\psi_{12}\right)g_{22}/\left(\overline{R}_2^1+\psi_{22}\right)$, $g_{22}\neq 0$ *(псевдориманова);*

5) $g_{11}=g_{22}=0$, $g_{12}\neq 0$ (*псевдориманова);*

6) $g_{12}=-\left(\overline{R}_1^1+2\psi_{21}-\psi_{12}\right)g_{11}/\left(\overline{R}_1^2-\psi_{11}\right)$,
$g_{22}=-\left(\overline{R}_2^1+\psi_{22}\right)g_{11}/\left(\overline{R}_1^2-\psi_{11}\right)$ $g_{11}\neq 0$, *причем метрика собственно риманова, если*

$$\left(\left(\overline{R}_1^1+2\psi_{21}-\psi_{11}\right)/\left(\overline{R}_1^2-\psi_{11}\right)\right)^2+\left(\overline{R}_2^1+\psi_{22}\right)/\left(\overline{R}_1^2-\psi_{11}\right)<0,$$

и псевдориманова, если

$$\left(\left(\overline{R}_1^1+2\psi_{21}-\psi_{11}\right)/\left(\overline{R}_1^2-\psi_{11}\right)\right)^2+\left(\overline{R}_2^1+\psi_{22}\right)/\left(\overline{R}_1^2-\psi_{11}\right)>0$$

(*в пунктах 2 – 6* $g_{\alpha\beta}\neq 0$ *– некоторые функции).*

2. Одномерный КП – это КП (R, f) на прямой R, который в каждой карте (U, x) на R задан обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,t,\frac{dx}{dt}\right).$$

Для произвольного КП (M, f) можно построить [1; 2] геодезическую (пульверизационную) модель так, что в пространстве событий $\overline{M}=M\times R$ моделирующая КП (M, f) стандартная связность $\overline{\Gamma}$ обладает свойством: ее геодезические линии совпадают с интегральными кривыми КП f.

Определение. Назовем КП (M, f) проективно римановым, если его связность является проективно эквивалентной римановой связности.

Теорема 3. *Для того чтобы квадратичный КП, заданный уравнением*

$$d^2x/dt^2=B(x,t)(dx/dt)^2+C(x,t)(dx/dt)+D(x,t)$$

на прямой R был проективно римановым, необходимо, чтобы выполнялось одно из следующих взаимоисключающих условий:

$$1)\begin{cases}-2\partial_{12}^2C+2C\partial_1C+3\partial_{11}^2D-3B\partial_1D-3D\partial_1B-C\partial_2B+\partial_{22}^2B=0,\\-2\partial_{12}^2B+\partial_{11}^2C-2B\partial_2B+B\partial_1C=0,\end{cases}$$

2) $\begin{cases} \partial_1 C/2 - \partial_2 B = -3\psi_{12}, \\ \partial_1 D - BD + C^2/4 - \partial_2 C/2 \neq -\psi_{22}, \\ \psi_{11} \neq 0, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \partial_1 C/2 - \partial_2 B \neq 3(\psi_{12} - \psi_{21}), \\ C^2/4 - \partial_2 C/2 + \partial_1 D - BD \neq -\psi_{22}, \\ \psi_{11} \neq 0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} \partial_1 C/2 - \partial_2 B \neq 3(\psi_{12} - \psi_{21}), \\ C^2/4 - \partial_2 C/2 + \partial_1 D - BD \neq -\psi_{22}, \\ \psi_{11} = 0, \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \partial_1 C/2 - \partial_2 B \neq 3(\psi_{12} - \psi_{21}), \\ C^2/4 - \partial_2 C/2 + \partial_1 D - BD = -\psi_{22}, \\ \psi_{11} = 0, \end{cases}$

6) $\begin{cases} \partial_1 C/2 - \partial_2 B \neq 3(\psi_{12} - \psi_{21}), \\ C^2/4 - \partial_2 C/2 + \partial_1 D - BD \neq -\psi_{22}, \\ \psi_{11} \neq 0. \end{cases}$

Замечание. Условие 1 теоремы 3 является также достаточным условием.

Теорема 4. *При выполнении одного из взаимоисключающих друг друга условий 2 – 6 теоремы 3 искомая метрика в соответствующих случаях (если существует подходящее решение системы (1)) необходимо имеет вид:*

2) $g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{11} = \psi_{11} g_{22} / \left(\partial_1 D - BD + C^2/4 - \partial_2 C/2 + \psi_{22}\right),$ *где* $g_{22} \neq 0$, *причем метрика собственно риманова, если* $\psi_{11} / \left(\partial_1 D - BD + C^2/4 - \partial_2 C/2 + \psi_{22}\right) > 0$, *и псевдориманова, если* $\psi_{11} / \left(\partial_1 D - BD + C^2/4 - \partial_2 C/2 + \psi_{22}\right) < 0$;

3) $g_{22} = 0, \quad g_{11} = \psi_{11} g_{12} / \left(\partial_1 C/2 - \partial_2 B + 2\psi_{21} - \psi_{12}\right)$, *где* $g_{12} \neq 0$ *(псевдориманова);*

4) $g_{12} = \left(\partial_1 C/2 - \partial_2 B + 2\psi_{21} - \psi_{12}\right) g_{22} / (C^2/4 - \partial_2 C/2 + \partial_1 D - BD + \psi_{22})$, $g_{11} = 0, \; g_{22} \neq 0$ *(псевдориманова);*

5) $g_{11} = g_{22} = 0, \; g_{12} \neq 0$ *(псевдориманова);*

6) $g_{12} = \left(\partial_1 C/2 - \partial_2 B + 2\psi_{21} - \psi_{12}\right) g_{11} (\psi_{11})^{-1}$, $g_{22} = \left(C^2/4 - \partial_2 C/2 + \partial_1 D - BD + \psi_{22}\right) g_{11} (\psi_{11})^{-1}$, $g_{11} \neq 0$, *причем метрика собственно риманова, если* $\left(\partial_1 C/2 - \partial_2 B + 2\psi_{21} - \psi_{11}\right)^2 (\psi_{11})^{-2} - \left(C^2/4 - \partial_2 C/2 + \partial_1 D - BD + \psi_{22}\right) \psi_{11}{}^{-1} < 0$, *и псевдориманова, если* $\left(\partial_1 C/2 - \partial_2 B + 2\psi_{21} - \psi_{11}\right)^2 (\psi_{11})^{-2} - \left(C^2/4 - \partial_2 C/2 + \partial_1 D - BD + \psi_{22}\right) \psi_{11}{}^{-1} > 0$ *(в пунктах 2 – 5* $g_{\alpha\beta} \neq 0$ *– некоторые функции).*

Список литературы

1. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320. № 3. С. 531 – 535.
2. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование 1, 2, 3 // Изв. вузов. Мат. 1992. № 6. С. 63 – 71; 1994. № 10. С. 26 – 32; 1995. № 5. С. 39 – 50.
3. *Игошин В.А., Коткова Н.В.* Существование римановой метрики плоскости с заданными символами Кристоффеля / Нижегород. гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород, 2002. Деп. в ВИНИТИ, № 168-В2003.
4. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. 256 с.
5. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Гостехиздат, 1967. 664 с.

V. Igoshin, N. Kotkova

ABOUT PROJECTIVELY RIEMANNIAN QUASIGEODESIC FLOWS

The series of theorems is obtained on the basis of the method of pulverization modelling [1; 2] and the results of [3]. This theorems are about existence of the Riemannian connection, projectively equivalent to the given symmetric affine connection or connection of one-dimensional quasigeodesic flow.

УДК 514.76

В.М. Исаев, С.Е. Степанов
(Владимирский государственный педагогический университет)

О КОНФОРМНО КИЛЛИНГОВОМ ТЕНЗОРЕ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Настоящая статья является продолжением работы авторов [1] и посвящена изучению конформно киллинговых тензорных полей на римановом многообразии постоянной ненулевой кривизны.

1. Введение и основной результат.

Хорошо известно (см. [2]), что на n-мерном римановом многообразии постоянной ненулевой кривизны C произвольный кон-