УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Объекты сечения, геометрической и фундаментально-групповой связностей

Установлены взаимоотношения между объектами сечения, геометрической и фундаментально-групповой связностей в общем и главном расслоениях. Показано, что ограничение горизонтального распределения плоской геометрической связности на секущую поверхность есть семейство ее касательных пространств. Введено полусимметрическое главное расслоение, для которого в дополнение к общему продолжению построены широкое и узкое продолжения.

***Ключевые слова*:** расслоение, главное расслоение, продолженное расслоение, горизонтальное распределение, геометрическая связность, фундаментально-групповая связность.

1. Общее расслоение

Рассмотрим общее расслоение, или составное многообразие Вагнера $V_r(M_n)$, базой которого является n-мерное гладкое многообразие M_n, а типовым слоем — гладкое многообразие V_r размерности r. Поскольку расслоение $V_r(M_n)$ является специальным $(n+r)$-мерным гладким многообразием, воспользуемся деривационной формулой [1 — 3] его произвольной точки A

$$dA = \omega^i e_i + \omega^\alpha e_\alpha \ \ (i,\ldots = \overline{1,n}\,;\ \alpha,\ldots = \overline{n+1,n+r}\,), \tag{1}$$

где векторы e_i, e_α образуют базис касательного пространства T_{n+r} к расслоению $V_r(M_n)$ в точке A. Структурные формы ω^i, ω^α расслоения $V_r(M_n)$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{D}\omega^{\mathrm{i}} = \omega^{\mathrm{j}} \wedge \omega_j^i,\ D\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \omega_{\beta}^{\alpha} + \omega^i \wedge \omega_i^{\alpha}, \qquad (2)$$

где D — символ внешнего дифференциала.

В силу структурных уравнений (2_1) система уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируема. Она фиксирует точку базы M_n, иначе говоря, слой расслоения $V_r(M_n)$. Подставим $\omega^i = 0$ в формулу (1)

$$\partial A = \overline{\omega}^{\alpha} e_{\alpha}\ \ (\partial = d\big|_{\omega^i = 0},\ \overline{\omega} = \omega\big|_{\omega^{\mathrm{i}} = 0}).$$

Значит, на векторы e_{α} натянуто вертикальное пространство $T_r = [e_{\alpha}]$ касательного пространства T_{n+r}, касающееся слоя, проходящего через точку A. При подстановке системы $\omega^i = 0$ в уравнения (2_2) получаем структурные уравнения r-мерного гладкого многообразия V_r: $D\overline{\omega}^{\alpha} = \overline{\omega}^{\beta} \wedge \overline{\omega}_{\beta}^{\alpha}$.

Продифференцируем внешним образом деривационную формулу (1) с помощью структурных уравнений (2)

$$(\Delta e_i - \omega_i^{\alpha} e_{\alpha}) \wedge \omega^i + \Delta e_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha} = \overline{0},$$

причем дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta e_i = de_i - \omega_i^j e_j,\ \Delta e_{\alpha} = de_{\alpha} - \omega_{\alpha}^{\beta} e_{\beta}.$$

Разрешая векторное квадратичное уравнение по лемме Картана, найдем деривационные формулы 2-го порядка

$$\Delta e_i - \omega_i^{\alpha} e_{\alpha} = \omega^j e_{ij} + \omega^{\alpha} e_{i\alpha},\ \Delta e_{\alpha} = \omega^i e_{\alpha i} + \omega^{\beta} e_{\alpha\beta}, \qquad (3)$$

где новые векторы e_{ij}, $e_{i\alpha}$, $e_{\alpha i}$, $e_{\alpha\beta}$ симметричны

$$e_{[ij]} = \overline{0},\ e_{[i\alpha]} = \overline{0},\ e_{[\alpha\beta]} = \overline{0}.$$

Касательное пространство 2-го порядка (соприкасающееся пространство) $T^2 = [e_i, e_{\alpha}, e_{ij}, e_{i\alpha}, e_{\alpha\beta}]$ в общем случае имеет следующую размерность:

$$\dim T^2 = \tfrac{1}{2}(n+r)(n+r+3)\,.$$

Сечение расслоения $V_r(M_n)$ задается уравнениями

$$\omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \omega^i\,, \tag{4}$$

которые определяют в расслоении n-мерную секущую поверхность S_n. Продифференцируем систему (4) с помощью структурных уравнений (2)

$$(\Delta_\theta \Lambda_i^\alpha + \theta_i^\alpha) \wedge \omega^i = 0 \;\; (\theta = \omega\big|_{(4)}), \tag{5}$$

$$\Delta_\theta \Lambda_i^\alpha = d_S \Lambda_i^\alpha + \Lambda_i^\beta \theta_\beta^\alpha - \Lambda_j^\alpha \theta_i^j \;\; (d_S = d\big|_{(4)}).$$

Разрешим квадратичные уравнения (5) по лемме Картана

$$\Delta_\theta \Lambda_i^\alpha + \theta_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j \;\; (\Lambda_{[ij]}^\alpha = 0). \tag{6}$$

Совокупность функций Λ_i^α называется фундаментальным объектом 1-го порядка поверхности $S_n \subset V_r(M_n)$.

Подставляя уравнения (4) в деривационную формулу (1), получим формулу для смещения точки A вдоль поверхности S_n

$$d_S A = \omega^i \varepsilon_i\,, \;\; \varepsilon_i = e_i + \Lambda_i^\alpha e_\alpha\,.$$

Совокупность векторов ε_i определяет касательное пространство $T_n = [\varepsilon_i]$ к поверхности S_n в точке $A \in S_n$.

2. Геометрическая связность

Зададим n-мерное распределение на расслоении $\mathrm{V_r(M_n)}$, трансверсальное r-мерному распределению, образованному полем вертикальных подпространств T_r. Преобразуем невертикальные векторы e_i с помощью линейных комбинаций вертикальных векторов e_α

$$E_i = e_i + L_i^\alpha e_\alpha\,.$$

Применим дифференциальный оператор Δ к обеим частям равенства и воспользуемся деривационными формулами (3)

$$\Delta E_i = (\Delta L_i^\alpha + \omega_i^\alpha) e_\alpha + \omega^j (e_{ij} + L_i^\alpha e_{\alpha j}) + \omega^\alpha (e_{i\alpha} + L_i^\beta e_{\beta\alpha}),$$

$$\Delta L_i^\alpha = dL_i^\alpha + L_i^\beta \omega_\beta^\alpha - L_j^\alpha \omega_i^j .$$

Совокупность векторов E_i инвариантна в произвольной точке A расслоения $V_r(M_n)$, если в первой скобке стоит линейная комбинация базисных и слоевых форм ω^j, ω^β. Иначе говоря, подпространство $\Pi_n = [E_i]$ инвариантно, если коэффициенты L_i^α удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta L_i^\alpha + \omega_i^\alpha = L_{ij}^\alpha \omega^j + L_{i\beta}^\alpha \omega^\beta . \qquad (7)$$

Подпространство Π_n касательного пространства T_{n+r} называется горизонтальным, а квазитензор L_i^α определяет связность Эресмана — Вагнера — Близникаса [4—6], или геометрическую связность [7].

Распределение горизонтальных подпространств Π_n ограничивается на поверхность S_n при подстановке уравнений (4) в дифференциальные уравнения (7)

$$\Delta_\theta \underline{L}_i^\alpha + \theta_i^\alpha = (\underline{L}_{ij}^\alpha + \underline{L}_{i\beta}^\alpha \Lambda_j^\beta)\omega^j \quad (\underline{L} = L\big|_{(4)}) . \qquad (8)$$

Сопоставляя уравнения (6) и (8), можно произвести отождествление

$$\Lambda_i^\alpha = \underline{L}_i^\alpha, \;\; \Lambda_{ij}^\alpha = \underline{L}_{ij}^\alpha + \underline{L}_{i\beta}^\alpha \Lambda_j^\beta ,$$

при условии

$$\underline{L}_{[ij]}^\alpha + \underline{L}_{[i\beta}^\alpha \Lambda_{j]}^\beta = 0, \qquad (9)$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование по крайним индексам в них.

Утверждение 1. *Ограничение горизонтально распределения на секущую поверхность* S_n *расслоения* $V_r(M_n)$ *определяется полем (8) квазитензора* $\underline{L}_i^\alpha$ *на базе* M_n. *Если выполняется условие симметрии (9), то* $\underline{L}_i^\alpha$ *можно отождествить с фундаментальным объектом поверхности* S_n, *а горизонтальные подпространства* Π_n *касаются поверхности* S_n: $\Pi_n = T_n$.

3. Продолжение общего расслоения

Продифференцируем структурные уравнения (2_1) и вынесем базисные формы

$$(D\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i) \wedge \omega^j = 0\,.$$

Применим лемму Лаптева [8]

$$\mathrm{D}\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i = \omega^k \wedge \omega_{jk}^i\,,$$

причем

$$\omega_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega_{[jk]}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0\,,$$

что эквивалентно сравнениям

$$\omega_{[jk]}^i \cong 0 \;\; (\mathrm{mod}\;\; \omega^l). \tag{10}$$

Изолируя внешний дифференциал, получим

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i\,. \tag{11}$$

Продолжим структурные уравнения (2_2)

$$\mathrm{D}\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^i \wedge \omega_{\beta i}^\alpha + \omega^\gamma \wedge \omega_{\beta\gamma}^\alpha\,, \tag{12}$$

$$D\omega_i^\alpha = \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha + \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^j \wedge \omega_{ij}^\alpha + \omega^\beta \wedge \omega_{i\beta}^\alpha\,, \tag{13}$$

причем выполняются сравнения

$$\omega_{[ij]}^\alpha \cong 0,\;\; \omega_{[i\beta]}^\alpha \cong 0,\;\; \omega_{[\beta\gamma]}^\alpha \cong 0 \;\; (\mathrm{mod}\,\omega^i, \omega^\alpha)\,. \tag{14}$$

При фиксации точки A вполне интегрируемой системой уравнений $\omega^i = 0, \omega^\alpha = 0$ уравнения (11—13) примут вид

$$D\overline{\omega}_j^i = \overline{\omega}_j^k \wedge \overline{\omega}_k^i, \; D\hat{\omega}_\beta^\alpha = \hat{\omega}_\beta^\gamma \wedge \hat{\omega}_\gamma^\alpha, \tag{15}$$
$$\mathrm{D}\hat{\omega}_i^\alpha = \overline{\omega}_i^j \wedge \hat{\omega}_j^\alpha + \hat{\omega}_i^\beta \wedge \hat{\omega}_\beta^\alpha \;\; (\hat{\omega} = \overline{\omega}\big|_{\omega^\alpha=0} = \omega\big|_{\omega^i=0,\,\omega^\alpha=0}).$$

Это структурные уравнения группы Ли H — подгруппы стационарности вертикального подпространства T_r в касательном пространстве T_{n+r}. Группа $H \subset GL(n+r)$ с размерностью $dimH = n^2 + r^2 + nr$ имеет две линейные факторгруппы $GL(n)$ и $GL(r)$ со структурными уравнениями (15_1), (15_2).

Утверждение 2. *Продолжение расслоения $V_r(M_n)$ является главным расслоением $H(V_r(M_n))$ со структурными уравнениями (2, 11 — 13), базой которого служит исходное расслоение, а типовым слоем — подгруппа стационарности H вертикального подпространства T_r в касательном пространстве T_{n+r} к расслоению $V_r(M_n)$ в точке A.*

Продолженное расслоение $H(V_r(M_n))$ назовем расслоением линейных реперов касательных пространств T_{n+r}, адаптированных вертикальным подпространствам T_r.

Утверждение 3. *Расслоение адаптированных линейных реперов $H(V_r(M_n))$ имеет два факторрасслоения со следующими структурными уравнениями: 1) (2_1, 11) — расслоение базовых линейных реперов $L_{n^2}(M_n)$ над базой M_n, типовой слой которого — линейная факторгруппа $\mathrm{L}_{\mathrm{n}^2} = \mathrm{GL(n)}$, действующая в касательном факторпространстве T_{n+r}/T_r к базе M_n в точке, соответствующей проходящему через точку A слою; 2) (2, 12) — расслоение вертикальных линейных реперов $L_{r^2}(V_r(M_n))$ над расслоением $V_r(M_n)$, типовым слоем которого служит линейная факторгруппа $L_{r^2} = GL(r)$, действующая в вертикальном пространстве T_r.*

4. Тензор кривизны геометрической связности

К объекту связности L_i^α в расслоении $V_r(M_n)$ можно прийти двойственным геометрическому пути аналитическим способом Близникаса [6]. Преобразуем слоевые формы ω^α с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^i: $\tilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha - L_i^\alpha \omega^i$. Внешние дифференциалы форм $\tilde{\omega}^\alpha$ приводятся к виду

$$D\tilde{\omega}^\alpha = \tilde{\omega}^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^i \wedge (\Delta L_i^\alpha + \omega_i^\alpha)\,. \qquad (16)$$

Требуется, чтобы выражение в скобках являлось комбинацией базисных и слоевых форм расслоения $V_r(M_n)$, то есть функции L_i^α удовлетворяли дифференциальным уравнениям (7). Тогда уравнения (16) становятся структурными уравнениями форм геометрической связности

$$D\tilde{\omega}^\alpha = \tilde{\omega}^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - L_{i\beta}^\alpha \omega^i) + R_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j\,,$$

где объект кривизны R_{ij}^α выражается по формуле [6, с. 197]

$$R_{ij}^\alpha = L_{[ij]}^\alpha + L_{[i\beta}^\alpha L_{j]}^\beta\,. \qquad (17)$$

Продолжим дифференциальные уравнения (7) с помощью структурных уравнений (11 — 13)

$$\Delta L_{ij}^\alpha - L_{i\beta}^\alpha \omega_j^\beta + L_i^\beta \omega_{\beta j}^\alpha - L_k^\alpha \omega_{ij}^k + \omega_{ij}^\alpha \approxeq 0\,,$$
$$\Delta L_{i\beta}^\alpha + L_i^\gamma \omega_{\gamma\beta}^\alpha + \omega_{i\beta}^\alpha \approxeq 0\,. \qquad (18)$$

Альтернируем дифференциальные сравнения (18_1) и используем условия (10, 14_1)

$$\Delta L_{[ij]}^\alpha - L_{[i\beta}^\alpha \omega_{j]}^\beta + L_{[i}^\beta \omega_{\beta j]}^\alpha \approxeq 0\,. \qquad (19)$$

Запишем сравнения для альтернированной свертки слоевых пфаффовых производных $L^{\alpha}_{i\beta}$ объекта геометрической связности L^{α}_{i} и компонент объекта связности L^{β}_{j}

$$\Delta(L^{\alpha}_{[i\beta}L^{\beta}_{j]}) + (L^{\gamma}_{[i}\omega^{\alpha}_{\gamma\beta} + \omega^{\alpha}_{[i\beta})L^{\beta}_{j]} + L^{\alpha}_{[i\beta}\omega^{\beta}_{j]} \cong 0\,. \tag{20}$$

Сложим сравнения (19) и (20), используем условия ($14_{2,\,3}$) и найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны R^{α}_{ij} (17): $\Delta R^{\alpha}_{ij} \cong 0$.

Утверждение 4. *Объект кривизны R^{α}_{ij} геометрической связности в расслоении $V_r(M_n)$, задаваемой полем объекта L^{α}_{i} на этом расслоении, является тензором.*

Плоская геометрическая связность характеризуется инвариантным условием $R^{\alpha}_{ij} = 0$, которое на поверхности S_n совпадает с условием (9) при отождествлении $\Lambda^{\alpha}_{i} =' L^{\alpha}_{i}$.

Утверждение 5. *Если геометрическая связность без кривизны ($R^{\alpha}_{ij} = 0$), то ограничение горизонтального распределения на поверхность S_n есть семейство ее касательных пространств.*

5. Главное расслоение

Рассмотрим случай общего расслоения $V_r(M_n)$, когда типовой слой V_r есть группа Ли G_r. В этом случае формы ω^{α}_{β} в структурных уравнениях (2_2) имеют вид

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}\,, \tag{21}$$

где $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — структурные постоянные группы Ли G_r, удовлетворяющие условию антисимметрии $C^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0$ и тождествам Якоби

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\delta\varepsilon} + C^{\alpha}_{\delta\gamma}C^{\gamma}_{\varepsilon\beta} + C^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}C^{\gamma}_{\beta\delta} = 0 \,. \tag{22}$$

Подставим выражения (21) в структурные (2_2):

$$D\omega^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + \omega^{i} \wedge \omega^{\alpha}_{i} \,. \tag{23}$$

Уравнения (2_1, 23) являются структурными уравнениями Лаптева для главного расслоения $G_r(M_n)$.

С помощью условий (21) дифференциальные уравнения (6, 7) приводятся к виду

$$d_S\Lambda^{\alpha}_{i} - \Lambda^{\alpha}_{j}\theta^{j}_{i} + \theta^{\alpha}_{i} = (\Lambda^{\alpha}_{ij} - C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Lambda^{\beta}_{i}\Lambda^{\gamma}_{j})\omega^{j} \,, \tag{24}$$

$$dL^{\alpha}_{i} - L^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i} + \omega^{\alpha}_{i} = L^{\alpha}_{ij}\omega^{j} + (L^{\alpha}_{i\beta} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}L^{\gamma}_{i})\omega^{\beta} \,. \tag{25}$$

Утверждение 6. *На главном расслоении $G_r(M_n)$ фундаментальный объект сечения Λ^{α}_{i} и объект геометрической связности L^{α}_{i} распадаются на r квазитензоров*

$$\Lambda^{\alpha} = \{\Lambda^{\alpha}_{i}\}_{\alpha=const} \,,\; L^{\alpha} = \{L^{\alpha}_{i}\}_{\alpha=const}$$

с дифференциальными уравнениями (24), (25).

Структурные уравнения (12) можно уточнить, дифференцируя выражения (21) форм ω^{α}_{β}:

$$D\omega^{\alpha}_{\beta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\delta\varepsilon}\omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} + \omega^{i} \wedge C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{i} \,. \tag{26}$$

Сопоставление уравнений (12) и (26) дает

$$\omega^{\alpha}_{\beta i} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{i} \,. \tag{27}$$

С помощью тождеств Якоби (22) и выражений (21) преобразуем 1-е слагаемое в формуле (26):

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\delta\varepsilon}\omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} = \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\delta}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\delta} \,. \tag{28}$$

Здесь во 2-м слагаемом раскроем обозначения (21):

$$\omega^{\delta}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\delta} = \omega^{\gamma} \wedge C^{\delta}_{\beta\gamma}\omega^{\alpha}_{\delta} \,.$$

Таким образом,

$$\omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\delta}_{\beta\gamma} C^{\alpha}_{\delta\varepsilon} \omega^{\varepsilon} . \qquad (29)$$

Подставим формы ω^{α}_{β} (21) в структурные уравнения (13):

$$D\omega^{\alpha}_{i} = \omega^{j}_{i} \wedge \omega^{\alpha}_{j} + \omega^{j} \wedge \omega^{\alpha}_{ij} + \omega^{\beta} \wedge \Omega^{\alpha}_{i\beta} , \qquad (30)$$

$$\Omega^{\alpha}_{i\beta} = \omega^{\alpha}_{i\beta} + \omega^{\alpha}_{\beta i} = \omega^{\alpha}_{i\beta} + C^{\alpha}_{\beta\gamma} \omega^{\gamma}_{i} . \qquad (31)$$

Если локальная полусимметрия (14_2) является полусимметрией:

$$\omega^{\alpha}_{[i\beta]} = 0 , \qquad (32)$$

то формула (31) упрощается

$$\Omega^{\alpha}_{i\beta} = 2C^{\alpha}_{\beta\gamma} \omega^{\gamma}_{i} . \qquad (33)$$

Утверждение 7. *В случае главного расслоения $G_r(M_n)$ структурные уравнения (11) не изменяются, в уравнениях (12) трехиндексные формы $\omega^{\alpha}_{\beta i}$, $\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$ имеют выражения (27), (29), а уравнения (13) принимают вид (30), в котором формы $\Omega^{\alpha}_{i\beta}$ (31) имеют наиболее простые выражения (33) при полусимметрии (32).*

Формула (28) позволяет записать структурные уравнения (26) в следующем виде:

$$D\omega^{\alpha}_{\beta} = 2\omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{i} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta i} .$$

Умножая на 2 и вводя обозначения, получим

$$D\Omega^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \Omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{i} \wedge \Omega^{\alpha}_{\beta i} , \qquad (34)$$

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = 2\omega^{\alpha}_{\beta} = 2C^{\alpha}_{\beta\gamma} \omega^{\gamma} , \ \Omega^{\alpha}_{\beta i} = 2\omega^{\alpha}_{\beta i} = 2C^{\alpha}_{\beta\gamma} \omega^{\gamma}_{i} . \qquad (35)$$

Утверждение 8. *К главному расслоению $G_r(M_n)$ присоединяется главное расслоение со структурными уравнениями (2_1, 34), изоморфное расслоению вертикальных линейных реперов $L_{n^2}(M_n)$.*

В силу выражений (21) структурные уравнения (15) упрощаются

$$D\overline{\omega}_j^i = \overline{\omega}_j^k \wedge \overline{\omega}_k^i, \ \mathrm{D}\hat{\omega}_i^\alpha = \overline{\omega}_i^j \wedge \hat{\omega}_j^\alpha .$$

Это структурные уравнения группы Ли $\hat{H}$ — подгруппы стационарности вертикального подпространства $\hat{T}_r$ с фиксированным репером [3] в пространстве T_{n+r}, касательном к главному расслоению $G_r(M_n)$ в произвольной точке *A*. Группа $\hat{H}$ с размерностью $\dim \hat{H} = n(n+r)$ имеет линейную факторгруппу *GL(n)*.

Утверждение 9. *Продолжение главного расслоения $G_r(M_n)$, рассматриваемого как особый случай общего расслоения $V_r(M_n)$, определяется структурными уравнениями (2_1, 11, 23, 30) и является главным расслоением $\hat{H}(G_r(M_n))$ над $G_r(M_n)$ с типовым слоем $\hat{H}$ — подгруппой стационарности реперированного вертикального подпространства $\hat{T}_r$ в касательном пространстве T_{n+r}.*

6. Продолжения полусимметрического главного расслоения

При полусимметрии (32) структурные уравнения (30) можно преобразовать, подставляя в них формы (33) и используя обозначение (35_1):

$$D\omega_i^\alpha = \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha + \omega_i^\beta \wedge \Omega_\beta^\alpha + \omega^j \wedge \omega_{ij}^\alpha . \qquad (36)$$

В этом случае продолжение полусимметрического главного расслоения $G_r(M_n)'$ можно рассматривать иначе, как главное расслоение $G'(M_n)$ над той же базой M_n со структурными уравнениями (2_1, 11, 23, 34, 36). При фиксации точки базы M_n эти уравнения принимают вид

$$D\overline{\omega}^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \overline{\omega}^\beta \wedge \overline{\omega}^\gamma, \ D\overline{\omega}_j^i = \overline{\omega}_j^k \wedge \overline{\omega}_k^i, \qquad (37)$$

$$D\overline{\Omega}_\beta^\alpha = \overline{\Omega}_\beta^\gamma \wedge \overline{\Omega}_\gamma^\alpha, \ D\overline{\omega}_i^\alpha = \overline{\omega}_i^j \wedge \overline{\omega}_j^\alpha + \overline{\omega}_i^\beta \wedge \overline{\Omega}_\beta^\alpha .$$

Это структурные уравнения некоторой группы Ли G', которую назовем широким продолжением типового слоя G_r полусимметрического главного расслоения $G_r(M_n)'$. Широкое продолжение G' группы Ли G_r есть группа Ли, имеющая 4 факторгруппы со следующими структурными уравнениями: 1) (37_1) — исходная группа Ли G_r; 2) (37_2) — базовая линейная группа *GL(n)*; 3) (37_3) — линейная группа L_{r^2}, изоморфная вертикальной линейной группе *GL(r)*; 4) ($37_{2—4}$) — группа Ли $\mathcal{H}$, изоморфная группе *H*. Группа Ли G', имеющая размерность $\dim G' = r + n^2 + r^2 + nr$, является прямым произведением $G' = G_r \times \mathcal{H}$, иначе говоря, факторгруппа $\mathcal{H}$ двойственна факторгруппе G_r в группе G'.

Утверждение 10. *Широкое продолжение полусимметрического главного расслоения* $G_r(M_n)'$ *является главным расслоением* $G'(M_n)$ *со структурными уравнениями (2_1, 11, 23, 34, 36), типовым слоем которого является группа Ли* G' *— широкое продолжение группы* G_r. *Расслоение* $G'(M_n)$ *имеет 4 главных факторрасслоения со следующими структурными уравнениями: 1) (2_1, 23) — исходное главное расслоение* $G_r(M_n)$; *2) (2_1, 11) — расслоение базовых линейных реперов* $L_{n^2}(M_n)$; *3) (2_1, 34) — расслоение псевдовертикальных линейных реперов* $\mathcal{L}_{r^2}(M_n)$; *4) (2_1, 11, 34,36) — главное расслоение* $\mathcal{H}(M_n)$, *двойственное расслоению* $G_r(M_n)$.

Подставим формы Ω^α_β (35_1) в структурные уравнения (36):

$$D\omega^\alpha_i = \omega^j_i \wedge \omega^\alpha_j + 2C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta_i \wedge \omega^\gamma + \omega^j \wedge \omega^\alpha_{ij}\,. \qquad (38)$$

При фиксации точки базы M_n формула (35_1) сохраняет вид

$$\overline{\Omega}^\alpha_\beta = 2C^\alpha_{\beta\gamma}\overline{\omega}^\gamma\,.$$

Эти уравнения описывают отображение $G_r \to \mathcal{L}_{r^2}$, поэтому псевдовертикальную линейную факторгруппу $\mathcal{L}_{r^2}$ группы G', имеющей факторгруппу G_r, можно не учитывать. Тогда в системе (37) пропадут структурные уравнения (37_3), а уравнения (37_4) примут вид

$$D\overline{\omega}_i^\alpha = \overline{\omega}_i^j \wedge \overline{\omega}_j^\alpha + 2C_{\beta\gamma}^\alpha \overline{\omega}_i^\beta \wedge \overline{\omega}^\gamma . \tag{39}$$

Получили структурные уравнения ($37_{1,2}$, 39) некоторой группы Ли $\dot{G}$, которую назовем узким продолжением типового слоя G_r полусимметрического главного расслоения $G_r(M_n)$. Узкое продолжение $\dot{G}$ группы G_r есть группа Ли с размерностью $\dim \dot{G} = r + n^2 + nr$, имеющая две факторгруппы: группу G_r и базовую линейную группу *GL(n)*.

Утверждение 11. *Узкое продолжение полусимметрического главного расслоения* $G_r(M_n)'$ *является главным расслоением* $\dot{G}(M_n)$ *со структурными уравнениями* (2_1, *11, 23, 38), типовым слоем которого служит группа Ли* $\dot{G}$ *— узкое продолжение группы* G_r.

7. Фундаментально-групповая связность как особая геометрическая связность

Вернемся к общему расслоению $V_r(M_n)$ и объекту геометрической связности. В дифференциальных уравнениях (7) раскроем действие оператора Δ, добавим к обеим частям слагаемое $L_i^\beta \omega_\beta^\alpha$ и используем обозначение (35_1):

$$dL_i^\alpha + L_i^\beta \Omega_\beta^\alpha - L_j^\alpha \omega_i^j + \omega_i^\alpha = L_{ij}^\alpha \omega^j + \underline{L}_{i\beta}^\alpha \omega^\beta , \tag{7'}$$

$$\underline{L}_{i\beta}^\alpha = L_{i\beta}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha L_i^\gamma .$$

С помощью соотношений (7,14$_2$, 18$_2$, 27. 29) найдем $\Delta \underline{L}^{\alpha}_{i\beta} \cong 0$. Следовательно, инвариантны равенства

$$\underline{L}^{\alpha}_{i\beta} = 0 \Leftrightarrow L^{\alpha}_{i\beta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma} L^{\gamma}_{i}. \tag{40}$$

Утверждение 12. *Если вертикальные пфаффовы производные $L^{\alpha}_{i\beta}$ объекта геометрической связности L^{α}_{i} являются линейными комбинациями (40$_2$) компонент этого объекта с коэффициентами — структурными постоянными $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ группы Ли G_r, в которую превращается типовой слой V_r при переходе (21) от общего расслоения $V_r(M_n)$ к главному расслоению $G_r(M_n)$, то геометрическая связность становится фундаментально-групповой, то есть горизонтальное распределение инвариантно по отношению к действию группы G_r.*

Действительно, подставляя равенства (40$_1$) в уравнения (7′), получим дифференциальные уравнения объекта фундаментально-групповой связности [9]:

$$d\Gamma^{\alpha}_{i} - \Gamma^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i} + \Gamma^{\beta}_{i}\Omega^{\alpha}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{i} = \Gamma^{\alpha}_{ij}\omega^{j} \quad (\Gamma = L\big|_{(40)}). \tag{41}$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения (6) объекта сечения Λ^{α}_{i} в случае (21) и уравнения (41) объекта связности Γ^{α}_{i}, отмечаем, что ограничения объекта Γ^{α}_{i} на секущую поверхность S_n главного расслоения $G_r(M_n)$ совпадают с объектом Λ^{α}_{i} лишь для абелевой группы (G_r $C^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$). Таким образом, установлена связь объекта геометрической связности L^{α}_{i} с объектами сечения и фундаментально-групповой связности Λ^{α}_{i}, Γ^{α}_{i}, которые между собой, вообще говоря, не связаны.

Список литературы

1. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

2. *Shevchenko Yu.* Non-symmetrical structure of adjoining spaces of a principal bundle // New Geometry of Nature. Kazan, 2003. Vol. 1. P. 187—190.

3. *Шевченко Ю.И.* Соприкасающиеся пространства голономного главного расслоения и подвижной репер 2-го порядка // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 156—163.

4. *Ehresmann C.* Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable // Colloque de Topologie. Bruxelles, 1950. P. 29—55.

5. *Вагнер В.В*. Теория составного многообразия // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. М. ; Л., 1950. Вып. 8. С. 11—72.

6. *Близникас В.И.* Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Литовский мат. сб. 1966. Т. 6, №2. С. 141—209.

7. *Шевченко Ю.И.* Связность в составном многообразии и ее продолжение // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1992. Вып. 23. С. 110—118.

8. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

9. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

Yu. Shevchenko

Objects of section, geometrical and fundamental-group connections

Relationships between objects of section, geometrical and fundamental-group connections in general and principle fiber bundles are established. It is shown, that restriction of horizontal distribution of flat geometrical connection on a secant surface is a family of its tangent spaces. Semi-symmetrical principle fiber bundle are introduced; broad and narrow continuations is constructed for this bundle in addition to the general continuation.