прямая переносится параллельно в связности $\Gamma_1=\{\Gamma_i,\Gamma_{ij},\Gamma^i_{jk}\}$, то точка пересечения ее с нормалью второго рода P_{n-2} смещается вдоль прямой, определяемой этой точкой и точкой Картана B; 5/ нормаль первого рода P_1 переносится параллельно в связности $\Gamma_2=(\Gamma^i_{jk},\Pi_k,\Gamma^i_k)$ тогда и только тогда, когда точка B смещается в нормали первого рода.

Список литературы

1.Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Г.Ф.Лаптева.-Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1973, т.4, с.7-70.

2.Норден А.П. Пространства аффинной связности.М., 1976.

3.Cartan E. Les espaces a connexion projective. -Тр.семинара по вект.и тенз.анализу, 1937, вып.4, с.147-159.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.14 1983

УДК 514.75

Ю.И.Шевченко

ОБ ОСНАЩЕНИИ КАРТАНА

Найдены условия, при которых подобъект объекта, характеризующего отображение друг на друга близких касательных плоскостей оснащенной по Картану поверхности проективного пространства, является объектом связности с точки зрения расслоенных пространств.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_J\}$ $(J,\mathcal{J},K=0,1,\dots,n)$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_J=\omega^K_J A_K$ $(\omega^J_J=0)$. Инвариантные формы проективной группы ω^K_J удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega^K_J=\omega^{\mathcal{J}}_J\wedge\omega^K_{\mathcal{J}}. \tag{1}$$

В пространстве P_n рассмотрим m-поверхность X_m общего вида и произведем специализацию подвижного репера $\{A_J\}$, помещая вершину A_o в текущую точку поверхности X_m, а вершины A_i $(i,j,k,\ell=\overline{1,m})$ -в соответствующую касательную плоскость T_m. Поверхность X_m в таком репере определяется уравнениями

$$\omega^\alpha_o=0 \quad (\alpha,\beta=\overline{m+1,n}), \tag{2}$$

$$\omega^\alpha_i=b^\alpha_{ij}\omega^j \quad (\omega^j=\omega^j_o). \tag{3}$$

Замыкая систему (2), получим $b^\alpha_{ij}=b^\alpha_{ji}$. Продолжая систему (3), найдем

$$\nabla b^\alpha_{ij}+b^\alpha_{ij}\omega^o_o=b^\alpha_{ijk}\omega^k, \tag{4}$$

где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla b^\alpha_{ij}=db^\alpha_{ij}-b^\alpha_{ik}\omega^k_j-b^\alpha_{kj}\omega^k_i+b^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta$$

В дальнейшем системы уравнений типа (4) будем записывать короче: $\nabla b^{\alpha}_{ij} + b^{\alpha}_{ij}\,\omega^0_0 \equiv 0$,

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i. Из структурных уравнений (1) с учетом системы (2),(3) следует, что формы $\omega^{i'}_{j'}$ $(i',j',k',\ell' = 0,1,\dots,m)$ и, в частности, формы ω^i удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge (\omega^i_j - \delta^i_j\,\omega^0_0), \tag{5}$$

$$\mathcal{D}\omega^{i'}_{j'} = \omega^{k'}_{j'} \wedge \omega^{i'}_{k'} + \omega^k \wedge \omega^{i'}_{j'k}, \tag{6}$$

где $\omega^{i'}_{j'k} = b^{\alpha}_{j'k}\,\omega^{i'}_{\alpha}$ $\quad (b^{\alpha}_{0k} = 0)$.

Уравнения (5),(6) по внешнему виду аналогичны структурным уравнениям главного расслоения [1, с. 51], но таковыми не являются, т.к. базисные формы ω^i входят в состав $\omega^{i'}_{j'}$. Тем не менее, применяя к этим уравнениям способ Лаптева [1, с. 83] задания связности в главном расслоении, найдем уравнения некоторого объекта:

$$\nabla \Pi^{i'}_{j'k} + \Pi^{i'}_{j'k}\,\omega^0_0 + \omega^{i'}_{j'k} \equiv 0,$$

где

$$\nabla \Pi^{i'}_{j'k} = d\Pi^{i'}_{j'k} - \Pi^{i'}_{j'\ell}\,\omega^{\ell}_k - \Pi^{i'}_{\ell' k}\,\omega^{\ell'}_{j'} + \Pi^{\ell'}_{j'k}\,\omega^{i'}_{\ell'}.$$

Запишем эти уравнения более подробно:

$$\nabla \Pi^i_{0k} \equiv 0, \quad \nabla \Pi^0_{0k} + \Pi^0_{0k}\,\omega^0_0 + \Pi^{\ell}_{0k}\,\omega^0_{\ell} \equiv 0,$$

$$\nabla \Pi^i_{jk} + \Pi^i_{jk}\,\omega^0_0 - \Pi^i_{0k}\,\omega^0_j + \omega^i_{jk} \equiv 0,$$

$$\nabla \Pi^0_{jk} + 2\Pi^0_{jk}\,\omega^0_0 - \Pi^0_{0k}\,\omega^0_j + \Pi^{\ell}_{jk}\,\omega^0_{\ell} + \omega^0_{jk} \equiv 0.$$

Подобъект $\Pi^{i'}_{0k}$ объекта $\Pi^{i'}_{j'k}$ образует тензор, поэтому его обращение в нуль имеет инвариантный смысл. Предположим

$$\Pi^i_{0k} = 0, \quad \Pi^0_{0k} = 0, \tag{7}$$

тогда уравнения остальных компонент $\Pi^{i'}_{jk}$ объекта $\Pi^{i'}_{j'k}$ упростятся:

$$\begin{cases} \nabla \Pi^i_{jk} + \Pi^i_{jk}\,\omega^0_0 + \omega^i_{jk} \equiv 0, \\ \nabla \Pi^0_{jk} + 2\,\Pi^0_{jk}\,\omega^0_0 + \Pi^{\ell}_{jk}\,\omega^0_{\ell} + \omega^0_{jk} \equiv 0. \end{cases} \tag{8}$$

Произведем оснащение Картана [3] поверхности X_m, т.е. к каждой ее точке A_0 присоединим плоскость K_{n-m-1}, не имеющую общих точек с касательной плоскостью T_m. Эту

плоскость зададим точками $B_{\alpha} = A_{\alpha} + \lambda^{i'}_{\alpha} A_{i'}$, где функции $\lambda^{i'}_{\alpha}$ удовлетворяют уравнениям $\nabla \lambda^{i'}_{\alpha} + \omega^{i'}_{\alpha} \equiv 0$. Объект $\Pi^{i'}_{jk}$ охватывается фундаментальным тензором b^{α}_{ij} и оснащающим квазитензором $\lambda^{i'}_{\alpha}$ по формулам

$$\Pi^{i'}_{jk} = b^{\alpha}_{jk}\,\lambda^{i'}_{\alpha}. \tag{9}$$

Из деривационных формул получаем:

$$dA_{i'} = \tilde{\omega}^{j'}_{i'} A_{j'} + \omega^{\alpha}_{i'} B_{\alpha}, \tag{10}$$

где

$$\tilde{\omega}^{j'}_{i'} = \omega^{j'}_{i'} - \Pi^{j'}_{i'k}\,\omega^k, \tag{11}$$

причем функции $\Pi^{j'}_{i'k}$ выражаются по формулам (7),(9).

Из формул (10),(11) видно, что проекция на касательную плоскость T_m смежной с ней плоскости $T_m + dT_m$ из центра K_{n-m-1} определяется функциями $\Pi^{j'}_{ik}$.

Расписывая уравнения (6) более подробно, получим уравнения (5) и следующие уравнения:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\,\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \bar{\omega}^i_{jk}, \\ \mathcal{D}\,\omega^0_j = \omega^0_j \wedge \omega^0_0 + \omega^i_j \wedge \omega^0_i + \omega^k \wedge \omega^0_{jk}, \\ \mathcal{D}\,\omega^0_0 = \omega^k \wedge \omega^0_k, \end{cases} \tag{12}$$

где $\bar{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \delta^i_k\,\omega^0_j$.

Уравнения (5),(12) являются структурными уравнениями некоторого главного расслоения, связность в котором задается с помощью объекта связности $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk}, \Gamma_k)$:

$$\begin{cases} \nabla \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{jk}\,\omega^0_0 + \bar{\omega}^i_{jk} \equiv 0, \\ \nabla \Gamma_{jk} + 2\,\Gamma_{jk}\,\omega^0_0 - \Gamma_k\,\omega^0_j + \Gamma^i_{jk}\,\omega^0_i + \omega^0_{jk} \equiv 0, \\ \nabla \Gamma_k + \Gamma_k\,\omega^0_0 + \omega^0_k \equiv 0. \end{cases} \tag{13}$$

Сравнивая объекты (Π^i_{jk}, Π^0_{jk}) и $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk}, \Gamma_k)$, видим, что их совпадение возможно лишь в случае

$$\Gamma_k = 0. \tag{14}$$

Подставляя эти значения в последнюю группу уравнений (13), получим

$$\omega_k^0 \equiv 0 . \tag{15}$$

Отметим, что при выполнении условий (14), (15) системы уравнений (8) и (13) совпадают.

Произведем нормализацию 2-го рода поверхности X_m, т.е. к каждой ее точке A_0 присоединим нормаль 2-го рода А.П.Нордена [2] - плоскость N_{m-1}, принадлежащую касательной плоскости T_m и не проходящую через точку касания A_0. Плоскость N_{m-1} зададим совокупностью точек $B_i = A_i + \Gamma_i A_0$. Осуществим дополнительную канонизацию репера $\{A_J\}$, помещая вершины A_i на нормаль 2-го рода N_{m-1}, тогда условия (14), (15) будут выполнены и объект $\Pi^{i'}_{jk}$ можно отождествить с объектом $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$. Заметим, что в силу сравнений (15) расслоение (5), (12) сокращается, поэтому объектом связности становится лишь подобъект Π^i_{jk} объекта $\Pi^{i'}_{jk}$.

Список литературы

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - Проблемы геометрии, 1979, т.9.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976.

3. Cartan E. Les espaces a connexion projective. Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу, 1937, вып.4, с.147-159.

УДК 514.75

Н.М.Шейдорова

К ГЕОМЕТРИИ ДВУХСОСТАВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{H}^{\tau}_m \subset P_n$.

Двухсоставным распределением $\mathcal{H}^{\tau}_m$ $(\tau<m<n-1)$ назовем пару распределений, состоящую из базисного распределения 1-го рода $\mathcal{H}_\tau$ τ-мерных плоскостей Π_τ и оснащающего распределения 1-го рода $\mathcal{H}_m$ m-мерных плоскостей Π_m, причем $\Pi_\tau(A) \subset \Pi_m(A)$ в каждом центре A распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$\bar{J}, \bar{\mathcal{J}}, \bar{K} = \overline{0,n}\ ; \quad J, \mathcal{J}, K = \overline{1,n}\ ; \quad i,j = \overline{\tau+1,m}\ ;$$

$$\bar{q}, \bar{p} = \overline{0,\tau}\ ; \quad p,q,s,t,f = \overline{1,\tau}\ ; \quad \alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n}\ ;$$

$$\bar{a} = \overline{0,m}\ ; \quad a = \overline{1,m}\ ; \quad u = \overline{\tau+1,n} .$$

Оператор определим формулой:

$$\nabla A^{J_1\dots J_\tau}_{K_1\dots K_\eta} = dA^{J_1\dots J_\tau}_{K_1\dots K_\eta} + A^{\mathcal{J} J_2\dots J_\tau}_{K_1\dots K_\eta}\omega^{J_1}_{\mathcal{J}} + \dots + A^{J_1\dots J_{\tau-1}\mathcal{J}}_{K_1\dots K_\eta}\omega^{J_\tau}_{\mathcal{J}} -$$
$$- A^{J_1\dots J_\tau}_{\mathcal{J}K_2\dots K_\eta}\omega^{\mathcal{J}}_{K_1} - \dots - A^{J_1\dots J_\tau}_{K_1\dots K_{\eta-1}\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{K_\eta} - (\tau-\eta)A^{J_1\dots J_\tau}_{K_1\dots K_\eta}\omega^0_0 .$$

1. Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_{\bar{J}}\}$, инфинитезимальные перемещения которого: $dA_{\bar{J}} = \omega^{\bar{K}}_{\bar{J}} A_{\bar{K}}$, где $\mathcal{D}\omega^{\bar{K}}_{\bar{J}} = \omega^{\bar{\mathcal{J}}}_{\bar{J}} \wedge \omega^{\bar{K}}_{\bar{\mathcal{J}}}$, $\sum\limits_{\bar{J}=0}^{n} \omega^{\bar{J}}_{\bar{J}} = 0$.

Пусть плоскость Π_τ задана точками $M_{\bar{p}} = A_{\bar{p}} + M^u_{\bar{p}} A_u$, плоскость Π_m -точками $N_{\bar{a}} = A_{\bar{a}} + A^{\alpha}_{\bar{a}} A_\alpha$ и $\Pi_\tau \subset \Pi_m$.

Канонизируем репер $\{A_{\bar{J}}\}$ следующим образом: совместим грань $[A_{\bar{a}}]$ с плоскостью Π_m распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$ так, что $\{A_p\} \subset \Pi_\tau$, A_0 совпадает с центром распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$. Такой репер назовем репером нулевого порядка R^0.

В репере R^0 дифференциальные уравнения распределе-