I2.Рыжков В.В.,Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.Итоги науки ВИНИТИ АН СССР.Алгебра.Топология.Геометрия.,М.,I971,I53-I69.

I3.Андреев Б.А.,О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.2, Калининград,I971,28-37.

I4.Ткач Г.П.,О некоторых классах аффинно-расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.3, Калининград,I973,I43-I52.

I5.Малаховский В.С.,К геометрии касательно оснащенных подмногообразий.Известия высших учебных заведений,Математика,I972,№9(I24),54-65.

I6.Малаховский В.С.,Касательно оснащенные конгруэнции коник.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.4, г.Калининград,I974,68-85.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

М а х о р к и н В.В.

МНОГООБРАЗИЯ КУБИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ n-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.(I)

Рассматриваются m-мерные многообразия кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства. Вводится понятие ассоциированных алгебраических многообразий.Рассмотрено ассоциированное алгебраическое многообразие,которое состоит в общем случае из 3^n точек,принадлежащих кубической гиперповерхности,и содержит все её особые точки.Доказано,что $(n-1)$-мерное многообразие кубических гиперповерхностей n-мерного пространства индуцирует $(n-1)$-мерные многообразия гиперквадрик.

§I.Многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к реперу $R\equiv\{A_\alpha\}$ с деривационными формулами

$$\mathcal{D}A_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta\,, \quad (\alpha,\beta,\gamma=0,1,\dots,n) \qquad (1.1)$$

где формы ω_α^β подчинены структурным уравнениям проективной группы:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta . \qquad (1.2)$$

Рассмотрим в P_n кубическую гиперповерхность C, заданную уравнением :

$$a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \qquad (1.3)$$

где $a_{\alpha\beta\gamma}$ симметричны относительно всех индексов.

Определение I. Многообразием $\mathfrak{C}(m,n)$ называется m-мерное многообразие кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства.

Многообразие $\mathfrak{C}(m,n)$ задается следующей системой уравнений Пфаффа:

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma i}\,\tau^i, \qquad (1.4)$$

где

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} \equiv da_{\alpha\beta\gamma} - a_{\lambda\beta\gamma}\,\omega_\alpha^\lambda - a_{\alpha\lambda\gamma}\,\omega_\beta^\lambda - a_{\alpha\beta\lambda}\,\omega_\gamma^\lambda - a_{\alpha\beta\gamma}\,\vartheta, \qquad (1.5)$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta\gamma i} = d\Lambda_{\alpha\beta\gamma i} - \Lambda_{\lambda\beta\gamma i}\,\omega_\alpha^\lambda - \Lambda_{\alpha\lambda\beta i}\,\omega_\beta^\lambda - \Lambda_{\alpha\beta\lambda i}\,\omega_\gamma^\lambda - \Lambda_{\alpha\beta\gamma j}\,\tau_i^j, \qquad (1.6)$$

а формы τ^i [I] являются инвариантными формами бесконечной аналитической группы преобразований пространства X_m (пространства параметров) и подчинены следующим структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\tau^i = \tau^\kappa \wedge \tau_\kappa^i , \qquad (1.7)$$

$$\mathcal{D}\tau_j^i = \tau_j^\kappa \wedge \tau_\kappa^i + \tau^\kappa \wedge \tau_{j\kappa}^i ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{D}\tau^i_{j_1 j_2 \ldots j_\tau} = \sum_{s=1}^{\tau} \frac{\tau!}{s!\,(\tau-s)!}\,\tau^\kappa_{(j_1 j_2 \ldots j_s} \wedge \tau^i_{j_{s+1} \ldots j_\tau)\kappa} + \tau^\kappa \wedge \tau^i_{j_1 j_2 \ldots j_\tau \kappa} .$$

Множитель ϑ в (I.5) является полным дифференциалом некоторой функции. Последовательно продолжая систему уравнений (I.4) получим бесконечную последовательность функций

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma i},\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2}, \ldots, \Lambda_{\alpha\beta i_1 i_2 \ldots i_p}, \ldots \quad , \qquad (1.8)$$

определяющих дифференциальную геометрию многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$.

Система величин

$$\{a_{\alpha\beta\gamma},\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1}, \ldots, \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2 \ldots i_p}\} \qquad (1.9)$$

образует фундаментальный объект порядка p многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$. Функции (I.8) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$d\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1} = \Lambda_{\alpha\beta\lambda i_1}\,\omega_\gamma^\lambda + \Lambda_{\alpha\lambda\gamma i_1}\,\omega_\beta^\lambda + \Lambda_{\lambda\beta\gamma i_1}\,\omega_\alpha^\lambda + {}$$
$$+ \Lambda_{\alpha\beta\gamma j}\,\tau_{i_1}^j + \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 j}\,\tau^j , \qquad (1.10)$$

$$d\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2} = \Lambda_{\lambda\beta\gamma i_1 i_2}\,\omega_\alpha^\lambda + \Lambda_{\alpha\lambda\gamma i_1 i_2}\,\omega_\beta^\lambda + \Lambda_{\alpha\beta\lambda i_1 i_2}\,\omega_\gamma^\lambda +$$

$$+\Lambda_{\alpha\beta\gamma j i_2}\overset{j}{\tau}_{i_1}+\Lambda_{\alpha\beta i_1 j}\overset{j}{\tau}_{i_2}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma j}\overset{j}{\tau}_{i_1 i_2}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2 j}\overset{j}{\tau},$$

$$d\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\dots,i_p}=\Lambda_{\lambda\beta\gamma i_1 i_2,\dots,i_p}\omega^\lambda_\alpha+\Lambda_{\alpha\lambda\gamma i_1 i_2,\dots,i_p}\omega^\lambda_\beta+$$

$$+\Lambda_{\alpha\beta\lambda i_1,\dots,i_p}\omega^\lambda_\gamma+\sum_{s=1}^{p}\frac{p!}{s!(p-s)!}\Lambda_{\alpha\beta\gamma j(i_{s+1},\dots,i_p}\overset{j}{\tau}_{i_1,\dots,i_s)}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\dots,i_p j}\overset{j}{\tau}.$$

(Скобки в индексах означают симметрирование по всем индексам в них заключенным).

Из уравнений (I.IO) следует, что система величин

$$\{\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1},\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2},\dots,\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\dots i_p}\} \tag{1.11}$$

образует геометрический объект, который в дальнейшем будем называть фундаментальным подобъектом порядка p многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$.

§2. Ассоциированные алгебраические многообразия.

Построим при помощи фундаментального подобъекта порядка p следующие системы алгебраических уравнений

$$F_0=0,\quad F_{i_1}=0,\dots,F_{i_1 i_2,\dots,i_p}=0, \tag{2.1}$$

и

$$F_{i_1}=0,\quad F_{i_1 i_2}=0,\dots,F_{i_1 i_2,\dots i_p}=0, \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}
&F_0\equiv a_{\alpha\beta\gamma}\,x^\alpha x^\beta x^\gamma,\\
&F_{i_1}\equiv\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1}x^\alpha x^\beta x^\gamma,\\
&F_{i_1 i_2}\equiv\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2}x^\alpha x^\beta x^\gamma,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F_{i_1 i_2,\dots,i_p}\equiv\Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\dots,i_p}x^\alpha x^\beta x^\gamma.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Из (I.5), (I.IO) и (2.3) следует, что

$$\begin{aligned}
&\delta F_0=\vartheta F_0,\\
&\delta F_{i_1}=\vartheta F_{i_1}+F_j\overset{\circ j}{\tau}_{i_1},\\
&\delta F_{i_1 i_2}=\vartheta F_{i_1 i_2}+F_{j i_2}\overset{\circ j}{\tau}_{i_1}+F_{i_1 j}\overset{\circ j}{\tau}_{i_2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\delta F_{i_1 i_2,\dots,i_p}=\vartheta F_{i_1 i_2,\dots,i_p}+\sum_{s=1}^{p}F_{j(i_{s+1},\dots,i_p}\overset{\circ j}{\tau}_{i_1,\dots,i_s)}.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Обозначим

$$N=1+m+\frac{m(m+1)}{2!}+\dots+\frac{m(m+1)(m-p+1)}{p!}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) вытекает, что при $N\le n$ система уравнений (2.I) определяет непустое алгебраическое многообразие. При $N\le n-1$ система уравнений (2.2) также определяет непустое алгебраическое многообразие.

Определение 2. Непустое алгебраическое многообразие, определяемое системой (2.I), называется многообразием ${}^{(p)}\mathfrak{f}(m,n)$ или фокальным многообразием ранга p.

О п р е д е л е н и е 3. Непустое алгебраическое многообразие, определяемое системой (2.2), называется многообразием ${}^{(p)}\dot{h}(m,n)$ или характеристическим многообразием ранга p .

Из определений (2) и (3) следует, что

$$ {}^{(s)}f(m,n) = C \cap {}^{(s)}h(m,n)\,. \qquad (2.6) $$

в общем случае

$$ C \supset {}^{(1)}f(m,n) \supset {}^{(2)}f(m,n) \supset \ldots \supset {}^{(s)}f(m,n)\,, \qquad (2.7) $$

$$ {}^{(1)}h(m,n) \supset {}^{(2)}h(m,n) \supset \ldots \supset {}^{(s)}h(m,n)\,. \qquad (2.8) $$

Бесконечная последовательность функций (I.8) порождает бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$ \begin{gathered} a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\ldots,i_p}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \qquad (2.9) $$

Согласно теореме Гильберта о базисе [2] система уравнений (2.9) обладает базисом. Пусть базисом системы уравнений (2.9) в некоторой области многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$ является система уравнений (2.I), тогда будем иметь:

$$ F_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} = b^{j_1 j_2,\ldots,j_p}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} F_{j_1 j_2,\ldots,j_p} + b^{j_1 j_2,\ldots,j_{p-1}}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} F_{j_1 j_2,\ldots,j_{p-1}} + $$
$$ + \ldots + b^{j_1}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} F_{j_1} + b_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} F_0\,. \qquad (2.10) $$

Из (2.I0) получаем

$$ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} = b^{j_1 j_2,\ldots,j_p}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} \Lambda_{\alpha\beta\gamma j_1 j_2,\ldots,j_p} + \ldots + $$
$$ + b^{j_1}_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}} \Lambda_{\alpha\beta\gamma j_1} + b_{i_1 i_2,\ldots,i_{p+s}}\, a_{\alpha\beta\gamma}\,. \qquad (2.11) $$

§3. Многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$.

Фокальное многообразие ранга один кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ определяется системой уравнений:

$$ \begin{gathered} a_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta\gamma i}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0\,. \end{gathered} \qquad (3.1) $$

Т е о р е м а I. Фокальное многообразие ${}^{(1)}f(n-1,n)$ кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ состоит в общем случае из 3^n точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений (3.I) состоит из n уравнений третьей степени, значит [3] фокальное многообразие в общем случае состоит из 3^n точек.

Характеристическое многообразие ранга один $\overset{(1)}{k}(n-1,n)$ кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{S}(n-1,n)$ является в общем случае алгебраической кривой порядка 3^{n-1}, её пересечение с C определяет фокальное многообразие $\overset{(1)}{f}(n-1,n)$. Осуществим следующую канонизацию репера R

$$a_{ooo} = a_{ooi} = \Lambda_{oooi} = 0, \quad a_{oon} = -1, \quad (3.2)$$

причем

$$\det \| \Lambda_{ooij} \| \neq 0.$$

Так как многообразие $\mathfrak{S}(n-1,n)$ определяется системой уравнений

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma i} \tau^i, \quad (i,j,k = 1,2,\dots,n-1) \quad (3.3)$$

где

$$\Delta \Lambda_{\alpha\beta\gamma i} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma ij} \tau^j,$$

то канонизация (3.2) геометрически означает, что вершина A_o репера R помещается в одну из фокальных точек кубической гиперповерхности C, являющейся её неособой точкой и описывающей гиперповерхность (A_o); в касательной плоскости к C в точке A_o располагаются вершины A_i.

Фокальные точки кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{S}(n-1,n)$, описывающие гиперповерхности, назовем фокальными точками первого рода.

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы неособая точка P кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{S}(n-1,n)$ являлась её фокальной точкой первого рода необходимо и достаточно, чтобы касательная плоскость к поверхности (P) в точке P совпала с касательной плоскостью к C в той же точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка P фокальная первого рода, то из (3.3), (3.2) получаем

$$\omega_o^n = 0,$$

следовательно,

$$dA_o = \omega_o^o A_o + \omega_o^k A_k,$$

т.е. касательные плоскости совпадают. Если точка P описывает гиперповерхность (P), касательная плоскость к которой в точке P совпадает с касательной плоскостью к C в точке P, то помещая вершину A_o в точку P, а вершины A_i на общую касательную плоскость, будем иметь:

$$\omega_o^n = 0.$$

Из (3.3) получим:

$$\Lambda_{oooi} \tau^i = 0.$$

Так как τ^i линейно-независимы, то

$$\Lambda_{oooi} = 0,$$

а значит точка P — фокальная точка.

Т е о р е м а 3. Фокальная точка первого рода кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{S}(n-1,n)$ индуцирует гиперквадрику, касающуюся C в этой точке.

Доказательство. Учитывая канонизацию (3.2) и обозначая

$$\Phi \equiv a_{0\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}, \tag{3.4}$$

будем иметь

$$\delta\Phi = (\pi_0^0 - \overset{\circ}{\vartheta})\Phi.$$

Значит

$$\Phi = 0$$

определяет в общем случае гиперквадрику. Из (3.4) следует, что Φ касается C.

Таким образом, с многообразием $\mathfrak{C}(n-1,n)$ в общем случае ассоциируется 3^n многообразий $K(n-1,n)$ [4].

Следствие. Фокальная точка первого рода кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ является фокальной точкой индуцированной гиперквадрики ассоциированного многообразия $K(n-1,n)$.

Теорема 4. Если все кубические поверхности многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ имеют общую точку, то она принадлежит многообразию, определяемому системой уравнений (2.9)

Доказательство. Поместим вершину A_0 репера в общую точку всех кубических поверхностей, тогда будем иметь

$$a_{000} = 0, \quad \omega_0^i = 0, \quad \omega_0^n = 0. \tag{3.6}$$

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0. \tag{3.7}$$

Из (3.3) и их продолжений с учетом (3.6) получим для любого p:

$$\Lambda_{000i_1} = 0, \ \Lambda_{000i_1i_2} = 0, \dots, \Lambda_{000i_1i_2\dots i_p} = 0.$$

Теорема 5. Каждая особая точка кубической гиперповерхности C многообразия $\mathfrak{C}(n-1,n)$ принадлежит её фокальному многообразию ${}^{(1)}f(n-1,n)$.

Доказательство. Особые точки кубической гиперповерхности C определяются следующей системой уравнений [3]:

$$\Pi_{\lambda} = 0, \tag{3.8}$$

где

$$\Pi_{\lambda} \equiv a_{\lambda\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}, \tag{3.9}$$

$$\delta\Pi_{\lambda} = \Pi_{\mu}(\pi_{\lambda}^{\mu} + \overset{\circ}{\vartheta}).$$

Расположим вершину A_0 репера R в одну из особых точек C, тогда из (3.9) получим

$$a_{00\lambda} = 0. \tag{3.10}$$

Из уравнений (3.3), получим

$$\Lambda_{000i} \tau^i = 0, \tag{3.11}$$

а так как τ^i линейно независимы, то

$$\Lambda_{000i} = 0. \tag{3.12}$$

То есть особая точка принадлежит фокальному многообразию ${}^{(1)}f(n-1,n)$.

Особая точка кубической гиперповерхности C индуцирует конус [3].

Литература.

I.Лаптев Г.Ф.,Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей.Геометрия.1963г.(Итоги науки ВИНИТИ АН СССР), М.,1965,5-64.

2.Ходж В.,Пидо Д.,Методы алгебраической геометрии,т.I, ИЛ,М.,1954.

3.Шафаревич И.Р.,Основы алгебраической геометрии,М., "Наука",1972.

4.Махоркин В.В.,Некоторые типы многообразий гиперквадрик."Дифференциальная геометрия многообразий фигур"вып.3, Калининград,1973,50-59.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Овчинников В.М.

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ,АССОЦИИРОВАННЫЕ С МНОГООБРАЗИЕМ ПОЛУКВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР.

В статье [3] изучалось дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов.В настоящей работе рассмотрены некоторые геометрические образы, ассоциированные с h-мерным многообразием пар фигур $\{F_1 F_2\}$, где F_1 -квадратичный элемент [2],а F_2 -не инцидентная ему точка.

§I.Система дифференциальных уравнений многообразия полуквадратичных пар фигур $\{F_1,F_2\}$.

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n h-мерное многообразие $V_{h,n}$ пар фигур $\{F_1,F_2\}$,где F_1 - квадратичный элемент,а F_2 -не инцидентная ему точка (многообразие полуквадратичных пар фигур).

Расположим вершины A_α $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots,n)$ репера $\{A_1,\ldots A_{n+1}\}$ в гиперплоскости квадратичного элемента F_1, а вершину A_{n+1} совместим с точкой F_2 .Уравнения инфинитезимальных перемещений репера имеют вид:

$$dA_J=\omega_J^{\varkappa}A_{\varkappa},$$

Зак. 10314.