flat generator L^*_m with which the point C is given, and the centre C describes the r-dimensional (r=n-m) surface X_r, and the tangent plane T_r to a surface X_r and generator L^*_m are intersected only at the centre C. With a surface $S^*_{n,m}$ the principal bundle is associated, which base is the surface X_r, and the typical fiber – the stationarity subgroup of pair planes (L^*_m, T_r). It is shown, that the curvature object of appropriate connection is a tensor containing 3 elementary and 4 simple subtensors.

УДК 514.75

М.А. Чешкова
(Алтайский государственный университет)

О ТРУБЧАТОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^n

Рассмотрена каналовая гиперповерхность *M* в евклидовом пространстве E^n – огибающая однопараметрического семейства гиперсфер. Если гиперсферы имеют постоянный радиус, то гиперповерхность *M* называется трубчатой.

Рассмотрим гладкую гиперповерхность в евклидовом пространстве E^n.

Обозначим F(M) – R-алгебру дифференцируемых на M функций, T^q_s – F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q,s), $\chi(M)$ – алгебру Ли векторных полей на M, ∂ – дифференцирование, $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в E^n.

Формулы Гаусса – Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [1, с. 36]:

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \beta(X,Y)n,\ \partial_X n = -AX, \qquad (1)$$

где $A \in T_1^1(M)$, $X, Y \in \chi(M)$, $\beta(X,Y) = g(AX, Y)$ – вторая фундаментальная форма, A – оператор Вейнгартена, ∇ – связность Леви – Чивита метрики $g(X,Y) = \langle X, Y \rangle$.

Выполняются уравнения Гаусса – Кодацци

$$R(X,Y)Z = \beta(Y,Z)AX - \beta(X,Z)AY, \; dA(X,Y) = 0, \qquad (2)$$

где $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ – тензор кривизны связности ∇, $dA(X,Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X,Y]$ – внешний дифференциал поля A в связности ∇.

Каналовая гиперповерхность [2; 3] M имеет две главные кривизны $k, \bar{k}$, причем кратность одной из них, например k, равна $n-2$, и главная кривизна k постоянная вдоль соответствующего (n – 2)-распределения Δ. Следовательно, оператор A имеет два собственных значения $k, \bar{k}$. Определены два распределения Δ, $\Delta^{\perp}$, где

$$\Delta(p) = \{X_p \in T_p M : AX_p = kX_p, p \in M\} \qquad (3)$$

и ортогональное ему распределение

$$\Delta^{\perp}(p) = \{X_p \in T_p M : AX_p = \bar{k}X_p, p \in M\}. \qquad (4)$$

Для каналовой гиперповерхности $Xk = 0$, $X \in \Delta$. Положим $V \in \Delta^{\perp}$ – орт. Рассмотрим равенство

$$dA(X,V) = (X\bar{k})V - (Vk)X + \bar{k}\nabla_X V - k\nabla_V X - A[X,V] = 0, X \in \Delta.$$

Разлагая $[X,V]$ на составляющие $[X,V]^{T} \in \Delta, [X,V]^{\perp} \in \Delta^{\perp}$ и используя равенства (3), (4) и $[X,V] = \nabla_X V - \nabla_V X$, $(\nabla_X V)^{\perp} = 0$, получим

$$\nabla_X V = hX, h = \frac{Vk}{\bar{k} - k}, (\nabla_V X)^{\perp} = \varepsilon(X)V, \varepsilon(X) = \frac{X\bar{k}}{k - \bar{k}}, \; X \in \Delta. \; (5)$$

Из равенства $dA(X,Y) = 0$, $X, Y \in \Delta$ следует, что $[X,Y] \in \Delta$, т. е. распределение Δ инволютивное.

Интегральные многообразия распределения Δ есть $(n-2)$-сферы S^{n-2} [2], принадлежащие гиперсферам, радиусы ρ которых равны $\rho = 1/|k|$, и гиперплоскостям [2]

$$\Pi_{n-1}(p) = \{\Delta(p), (hV + kn)_p\}, \; p \in M. \tag{6}$$

Если $k\bar{k} \neq 0$, то определены фокальные поверхности $(F), (\bar{F})$, где $F = r + \frac{1}{k}n$, $\bar{F} = r + \frac{1}{\bar{k}}n$, r – радиус-вектор текущей точки гиперповерхности M, n – орт нормали к M.

Если $k = const \neq 0$, то гиперповерхность M называется трубчатой гиперповерхностью и является огибающей однопараметрического семейства гиперсфер постоянного радиуса $1/|k|$. Из (5) следует, что для трубчатой гиперповерхности

$$h = 0, \quad \nabla_X V = 0, \quad X \in \Delta. \tag{7}$$

Кроме того, дифференцируя равенство $< Y, V >= 0, Y \in \Delta$ вдоль $X \in \Delta$, получим

$$\nabla_X Y \in \Delta, \; X, Y \in \Delta. \tag{8}$$

Из (6), (7) следует

Теорема 1. *Если гиперповерхность* M *есть трубчатая, то гиперплоскость, содержащая (n – 2)-сферу* S^{n-2}*, проходит через нормаль к гиперповерхности M.*

Для случая $k\bar{k} \neq 0$ рассмотрим фокальные поверхности $(F), (\bar{F})$.

Теорема 2. *Если невырожденная гиперповерхность* M *есть трубчатая и не является дважды каналовой, то* (F) *есть кривая, а* $(\bar{F}) - (n-2)$*-параболическая гиперповерхность.*

Доказательство. Так как $\partial_X F = \partial_X (r + \frac{1}{k}n) = 0$, $\partial_X |F - r| = \partial_X \frac{1}{|k|} = 0, X \in \Delta$, то (F) – кривая, которую описывают центры F гиперсфер. Рассмотрим поверхность $(\bar{F})$. Имеем

$$\partial_X \bar{F} = \frac{\bar{k} - k}{\bar{k}^2}(\varepsilon(X)n + \bar{k}X),\ \partial_V \bar{F} = -\frac{V\bar{k}}{\bar{k}^2}n,\ X \in \Delta. \qquad (9)$$

Замечаем, что если $V\bar{k} \neq 0,$ то $(\bar{F})$ есть гиперповерхность и V есть орт нормали к $(\bar{F})$. А в силу (7) следует, что гиперповерхность $(\bar{F})$ имеет главную нулевую кривизну кратности $n-2$, т. е. гиперповерхность $(\bar{F})$ является $(n-2)$-параболической гиперповерхностью [4]. Теорема доказана.

Если для трубчатой гиперповерхности M выполняется равенство $V\bar{k} = 0,$ то M является дважды каналовой гиперповерхностью [5] и $(\bar{F})$ есть $(n-2)$-плоскость [5].

Рассмотрим уравнения Гаусса – Кодацци. Распишем равенство

$$R(X,V)Y = \nabla_X \nabla_V Y - \nabla_V \nabla_X Y - \nabla_{[X,V]}Y = -k\bar{k}g(X,Y)V, X, Y \in \Delta$$

и, используя (5), (6), (7), получим

$$X\varepsilon(Y) - \varepsilon(\nabla_X Y) + \varepsilon(X)\varepsilon(Y) = -k\bar{k}g(X,Y),\ X, Y \in \Delta. \qquad (10)$$

Если $\bar{k} \neq \mathrm{const}$, то дифференциальное уравнение $d\bar{k}(X) = X\bar{k} = 0$ определяет на M инволютивное $(n-2)$-распределение Δ^*.

Теорема 3. *Если распределения* Δ, Δ^* *совпадают, то* M *есть гиперцилиндр.*

Доказательство. Распределения Δ, Δ^* совпадают, если $\varepsilon(X) = X\bar{k} = 0,\ \forall X \in \Delta$. В этом случае из (8) и (10) следует, что $\bar{k} = 0$ $(k = \mathrm{const} \neq 0)$ и M есть гиперцилиндр.

Если Δ, Δ^* не совпадают, то $\varepsilon(X) = 0,\ X \in \Delta$ определяет $(n-3)$-распределение $\delta \subset \Delta$.

Теорема 4. *Распределение* δ *инволютивное.*

Доказательство. В силу (8), (10)

$$\varepsilon([X,Y]) = \varepsilon(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = 0,\ [X,Y] \in \Delta,\quad X,Y \in \Delta.$$

Таким образом, $[X,Y] \in \delta$, если $X,Y \in \delta$, т. е. распределение δ инволютивное. Теорема доказана.

Так как $\nabla_V V \in \Delta$, то положим

$$\nabla_V V = cU, \tag{11}$$

где $U \in \Delta$ – орт. Покажем, что $U \perp \delta$. Действительно,

$$< X,V >= 0, X \in \Delta \ \Rightarrow\ < \nabla_V X, V > + < X, \nabla_V V >= 0 \ \Rightarrow$$

$$\varepsilon(X) + c < X,U >= 0. \tag{12}$$

Откуда $X \in \delta \Leftrightarrow X \perp U$. Таким образом,

$$\varepsilon(X) = 0,\ X \in \delta,\ \ \varepsilon(U) = -c \neq 0. \tag{13}$$

Теорема 5. *Интегральная кривая γ векторного поля* U – *геодезическая.*

Доказательство. Расписывая $R(X,V)V = k\bar{k}X$, $X \in \Delta$ и используя (5), (6), получим

$$\nabla_X \nabla_V V + \varepsilon(X)\nabla_V V = k\bar{k}X \Rightarrow (Xc)U + c\nabla_X U + \varepsilon(X)cU = k\bar{k}X.$$

Так как $\nabla_X U \perp U$, то имеем

$$c\nabla_X U = k\bar{k}X, X \in \delta, \tag{14}$$

$$Xc = 0, X \in \delta, \tag{15}$$

$$Uc + c\varepsilon(U) = k\bar{k}, \tag{16}$$

$$\nabla_U U = 0. \tag{17}$$

Из (17) следует, что интегральная кривая γ поля U – геодезическая. Теорема доказана.

Теорема 6. *Интегральная кривая* γ *поля* U – *окружность, а интегральное многообразие* Q *распределения* δ – $(n-3)$ *-сфера.*

Доказательство. Из равенств $\partial_U U = kn,\ \partial_U n = -kU,$ $Uk = 0$ следует, что кривая γ плоская и $k = const$ есть кривизна кривой γ. Таким образом, γ – окружность. Интегральное многообразие Q принадлежит (n – 2)-сфере S^{n-2}. Докажем, что Q принадлежит также (n – 2)-плоскости, не совпадающей с Δ. Дифференцируем равенство $<Y,U>=0, Y\in\delta$ вдоль $X\in\delta$ и используем (14). Имеем

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^\delta - \frac{k\bar{k}}{c} g(X,Y)U,\ \ X, Y()^\delta \in \delta,$$

$$\partial_X Y = (\nabla_X Y)^\delta - kg(X,Y)(\frac{\bar{k}}{c}U - n).$$

Соприкасающаяся (n – 2)-плоскость многообразия Q имеет вид: $\pi_{n-2} = \{p,\delta,t\},\ \ p\in Q$, где $t = \bar{k}U - cn$. Так как в силу $X\bar{k} = 0, X\in\delta$, (14) и (15), получим $\partial_X Y\in\delta,\ \partial_X t\in\delta,\ \ X, Y\in\delta$. Таким образом, π_{n-2} постоянная вдоль δ. Следовательно, $Q = S^{n-2}\cap\pi_{n-2}$. Теорема доказана.

Так как $\partial_X\bar{F} = \frac{\bar{k}-k}{\bar{k}}X,\ X\in\delta,\ \partial_U\bar{F} = \frac{\bar{k}-k}{\bar{k}^2}(\bar{k}U - cn)$, то $(n-2)$-плоская образующая L_{n-2} гиперповерхности $(\bar{F})$ имеет вид: $L_{n-2} = \{\bar{F},\delta,\bar{k}U - cn\} = \{\bar{F},\delta,t\},\ \bar{F}\in(\bar{F})$. Откуда вытекает

Теорема 7. *$(n-2)$-плоскость, содержащая* Q *, и $(n-2)$-плоская образующая гиперповерхности* $(\bar{F})$ *параллельны.*

Список литературы

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.,1981. Т. 2.

2. *Чешкова М.А.* Поверхности в евклидовом пространстве E^n. Барнаул, 2003.

3. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. М., 1963.

4. *Борисенко А.А.* О полных параболических поверхностях // Укр. геом. сб. 1985. Вып. 28. С. 8 – 19.

5. *Чешкова М.А.* Дважды каналовые гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n // Мат. сб. 2000. Т. 191. №6. С. 155 – 160.

M. Cheshkova

ABOUT A TUBULAR HYPERSURFACE IN A EUCLIDEAN SPACE E^n

The canal hypersurface M in a Euclidean space E^n – the envelope of one-parameter families of hypersphericals is considered. If the hypersphericals have constant radius, then the hypersurface M refers to tubular.

УДК 514.75

Ю.И. Шевченко
(Калининградский государственный университет)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКОСТЕЙ, ПОРОЖДЕННАЯ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено произвольное семейство плоскостей любых размерностей. С этим семейством ассоциированны расслоение Ю.Г. Лумисте и расслоение проективных реперов, в которых заданы соответственно геометрическая и проективная связности. Доказано, что проективная связность порождает геометрическую связность.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A,A_I\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A\ (I,J,K=\overline{1,n}), \qquad (1)$$