3. *Фисунов П.А.* Центропроективные связности в расслоениях нормалей первого рода на неголономной гиперполосе. Чебоксары, 1998. Деп. в ВИНИТИ РАН.- №627-В98.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. об-ва. 1953. Т.2. С. 275—382.

5. *Чакмазян А.В.* Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С. 55—74.

6. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. 1975. Т. 7. С. 117—151.

7. *Попов Ю.И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$ -распределением проективного пространства. I. Калининград, 1984. Деп. в ВИНИТИ. №4481—84.

N. Eliseeva

NORMAL CONNECTIONS, INDUCED IN A BUNDLE OF NORMALS OF THE 1-ST KIND ON Λ-SUB BUNDLE OF H(Π)-DISTRIBUTION

Twenty four normal connections are constructed on equipped in sens of Norden-Cartan L-subbundle in a bundle of its normals of the 1-st kind. The coincidence conditions of some connections are indicated.

УДК 514.75

М.В. Кретов

(Российский государственный университет им. Иммануила Канта)

О ГЛАВНЫХ ТОЧКАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОМПЛЕКСОМ ГИПЕРКВАДРИК

Продолжается изучение дифференцируемых отображений n-мерного аффинного пространства в пространство центральных невырожденных гиперквадрик, образами которого являются n-параметрические семейства гиперквадрик. Вводится понятие аналога главных точек точечных отображений. Этому аналогу дана геометрическая характеристика.

Рассмотрим аффинное пространство A_n размерности $n \geq 3$. Отнесём его к подвижному реперу $R = \{A, \overline{e_\alpha}\}$, состоящему из точки A и n линейно независимых векторов $\overline{e_\alpha}$ $(\alpha, \beta, ... = \overline{1, n})$.

Центральная невырожденная гиперквадрика q пространства A_n является индуцирующей фигурой ранга $N = C^2_{n+2} - 1$ индекса n [1]. Её уравнение запишется в виде:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2a_\alpha x^\alpha - 1 = 0,$$

причём

$$\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0, \ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}.$$

Будем рассматривать комплексы (n-параметрические семейства) K_n гиперквадрик q в частично канонизированном репере R_0, который построен при $a_\alpha = 0$. Возможность построения такого репера следует из леммы Н.М. Остиану [2].

Геометрически репер R_0 характеризуется тем, что A − центр гиперквадрики q.

Рассмотрим пространство $R(q)$, образующим элементом которого является гиперквадрика q n -мерного аффинного пространства A_n. Структурными формами пространства $R(q)$ являются формы $\nabla a_{\alpha\beta}$, ω^α [3; 4].

Исследуем локальное дифференцируемое отображение: $f: C \in A_n \mapsto q \in R(q)$, где C − центр гиперквадрики q, отнесённой к реперу R_0. Система дифференциальных уравнений отображения f совпадает с системой дифференциальных уравнений комплекса K_n: $\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma$.

В работе [3] показано, что геометрический объект $\Gamma_2 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ является фундаментальным объектом второго порядка отображения f.

Пусть гиперквадрика $q^0 \in R(q)$ с центром C^0 задаётся уравнением $\overset{0}{a}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta - 1 = 0$, а гиперквадрика $q \in R(q)$ − уравнением $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2a_\alpha x^\alpha - 1 = 0$. Рассмотрим гиперквадрику Q, которая определяется следующим уравнением: $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta - 1 = 0$. Геометрическая характеристика гиперквадрики Q дана в работе [3].

Рассмотрим отображения:

$$\psi(q^0) = z \circ f : C \in A_n \mapsto Q \in R(q),$$

$$\varphi\phi_1(q^0): C \in A_n \mapsto \pi \in R(\pi),$$

$$\phi_2(q^0): C \in A_n \mapsto \Pi \in R(\pi),$$

где $z(q^0): q \in R(q) \mapsto Q \in R(q)$, $R(\pi)$ − пространство гиперплоскостей аффинного пространства A_n, π − поляра точки

C^0 относительно гиперквадрики q, Π − поляра точки C относительно гиперквадрики Q.

Пусть X^α − координаты центра C гиперквадрики q. Тогда согласно работе [5] уравнения отображений ψ, φ_1 и φ_2 имеют, соответственно, вид:

$$a_{\alpha\beta} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\gamma + \frac{1}{2}\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}X^\gamma X^\delta + \langle 3\rangle, \tag{1}$$

$$a_\alpha = -\overset{0}{a}_{\alpha\beta}X^\beta - \Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\beta X^\gamma + \langle 3\rangle, \tag{2}$$

$$H_\alpha = \overset{0}{a}_{\alpha\beta}X^\beta + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\beta X^\gamma + \langle 3\rangle, \tag{3}$$

где символ $\langle k\rangle$ означает совокупность членов порядка малости $p \geq k$ относительно приращений координат точки области определения.

Уравнения касательных к отображениям ψ, ϕ_1 и ϕ_2 дробнолинейных отображений $K_\psi(P_\alpha)$, $K_{\phi_1}(Q_\mu)$ и $K_{\phi_2}(S_\mu)$ имеют, соответственно, вид [6]:

$$a_{\alpha\beta} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\gamma}{1-P_\mu X^\mu}, \tag{4}$$

$$a_\alpha = -\frac{\overset{0}{a}_{\alpha\beta}X^\beta}{1-Q_\mu X^\mu}, \tag{5}$$

$$H_\alpha = \frac{\overset{0}{a}_{\alpha\beta}X^\beta}{1-S_\mu X^\mu}, \tag{6}$$

где тензоры P_α, Q_α и S_α определяют гиперплоскости $H(P_\alpha)$, $H(Q_\alpha)$ и $H(S_\alpha)$, задаваемые, соответственно, уравнениями: $P_\alpha X^\alpha - 1 = 0$, $Q_\alpha X^\alpha - 1 = 0$ и $S_\alpha X^\alpha - 1 = 0$. Геометрическая характеристика гиперплоскостей $H(P_\alpha)$, $H(Q_\alpha)$ и $H(S_\alpha)$ дана в работе [3].

Уравнения касательных к отображению f, определяемому уравнениями (1) и (2), дробнолинейных отображений $K_f(P_\alpha)$ имеют вид (4), (5) при $Q_\mu = P_\mu$, т.е. при совпадении гиперплоскостей $H(P_\alpha)$ и $H(Q_\alpha)$.

Для рассмотрения главных точек дифференцируемых отображений a, где $a = \psi$, ϕ_1, ϕ_2 и f, необходимы понятия $K_a(P_\alpha)$ − главных прямых, введённых в работе [7].

Зададим кривую L системой дифференциальных уравнений

$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha dt, \tag{7}$$

где $t \in R$. Продолжая систему (7), получим $\nabla\Lambda^\alpha = M^\alpha dt$, $\nabla M^\alpha = N^\alpha dt$. Координатное представление отображения L имеет вид:

$$X^\alpha = \Lambda^\alpha t + \frac{1}{2} M^\alpha t^2 + \langle 3 \rangle. \tag{8}$$

Определение 1. *Прямая* Λ *называется* $K_a(P_\alpha)$ *−главной, если для всех касательных к ней в точке* C^0 *кривых вида (8) кривые* $Z = a \circ L$ *и* $Z^* = K_a(P_\alpha) \circ L$ *имеют аналитическое касание второго порядка [8].*

$K_\psi(P_\alpha)$ −главные, $K_{\phi_1}(Q_\alpha)$ −главные и $K_{\phi_2}(S_\alpha)$ −главные направления принадлежат, соответственно, инвариантному конусу:

$$(\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2\Lambda_{\alpha\beta\gamma} P_\delta)\Lambda^\gamma \Lambda^\delta = 0, \tag{9}$$

$$\left(\Lambda_{\alpha\beta\gamma} - \overset{0}{a}_{\alpha\beta} Q_\gamma\right)\Lambda^\beta \Lambda^\gamma = 0, \tag{10}$$

$$\left(\Lambda_{\alpha\beta\gamma} - \overset{0}{a}_{\alpha\beta} S_{\gamma}\right)\Lambda^{\beta}\Lambda^{\gamma} = 0. \qquad (11)$$

$K_f(P_\alpha)$–главные направления принадлежат инвариантному конусу, определяемому уравнениями (9) и (10) при совпадении гиперплоскостей $H(P_\alpha)$ и $H(Q_\alpha)$.

Пусть $\overline{A_n}$ − расширенное аффинное пространство, получаемое из A_n присоединением точек несобственной гиперплоскости π^0.

Определение 2. *Точка* $\tilde{A} \in \overline{A_n}$ *называется* f − *главной точкой относительно точки* C^0*, если существует касательное дробнолинейное отображение* $K_f(P_\alpha)$ *такое, что: 1)прямая* $\left[C^0, \tilde{A}\right]$ *является* $K_f(P_\alpha)$ − *главной; 2)гиперплоскость* $H(P_\alpha)$ *, определяющая отображение* $K_f(P_\alpha)$ *, инцидентна точке* $\tilde{A}$.

Аналогично определяются ψ − главные, ϕ_1 − главные и ϕ_2 − главные точки относительно точки C^0. Если ясно, относительно какой точки C^0 точка $\tilde{A}$ является главной, указание на точку C^0 будем опускать. Множество a − главных точек будем обозначать символом Ψ_a.

Теорема 1. *На каждой* $K_a(P_\alpha)$ − *главной прямой существует единственная* a − *главная точка.*

Доказательство. Существование a − главной точки непосредственно следует из определения 2. Докажем единственность. Доказательство проведём для отображения f , так как для отображений ψ , ϕ_1 и ϕ_2 оно проводится аналогично. Пусть точка $\hat{A} = \tilde{A} + X^\alpha \overline{e_\alpha}$ определяет направление, главное для $K_f(P_\alpha)$ и $K_f(\hat{P}_\alpha)$. Тогда имеем

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} X^\gamma X^\delta = 2P_\delta \Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\gamma X^\delta = 2\hat{P}_\delta \Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\gamma X^\delta, \qquad (12)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^{\beta}X^{\gamma}=P_{\gamma}\overset{0}{a}_{\alpha\beta}X^{\beta}X^{\gamma}=\hat{P}_{\gamma}\overset{0}{a}_{\alpha\beta}X^{\beta}X^{\gamma}. \qquad (13)$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы точка $\tilde{A}$ была f −главной, является её принадлежность гиперплоскости, задаваемой уравнением $P_{\alpha}X^{\alpha}-1=0$. Рассмотрим на прямой $\left\lfloor C^0,\tilde{A}\right\rfloor$ f −главную точку B с координатами $\tilde{\lambda}X^{\alpha}$, принадлежащую гиперплоскости с уравнением $\hat{P}_{\alpha}X^{\alpha}-1=0$ и конусам (12) и (13). Тогда имеет место равенство $\tilde{\lambda}=1$, т.е. $B=\tilde{A}$. Теорема доказана.

Объектом $\left\{\overset{0}{a}_{\alpha\beta},\Lambda_{\alpha\beta\gamma},\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\right\}$ второго порядка отображения f определяются для каждой точки C^0 алгебраические многообразия J_{ψ} и J_{ϕ} $\left(J_{\phi}\overset{def}{=}J_{\phi_1}\overset{def}{=}J_{\phi_2}\right)$, задаваемые, соответственно, уравнениями:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}X^{\gamma}X^{\delta}-2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^{\gamma}=0, \qquad (14)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^{\beta}X^{\gamma}-\overset{0}{a}_{\alpha\beta}X^{\beta}=0. \qquad (15)$$

Их пересечение определяет алгебраическое многообразие J_f. Инвариантное алгебраическое многообразие J_a будем называть индикатрисой отображения a. Заметим, что системы уравнений, определяющие индикатрисы J_f и J_{ψ}, имеют нетривиальные решения только в специальных случаях, а индикатриса J_{ϕ} в общем случае состоит из 2^n точек.

Пусть множество $\aleph$ состоит из точки C^0. Имеет место следующая

Теорема 2. *Множество* a *−главных точек* Ψ_a *состоит из точек индикатрисы* J_a*, не принадлежащих множеству* $\aleph$*, т. е.* $\Psi_a = J_a \setminus \aleph$.

Доказательство следует из уравнений (12—15) и уравнений гиперплоскостей $H(P_\alpha)$, $H(Q_\alpha)$ и $H(S_\alpha)$.

Следствие. $J_a = \Psi_a \cup \aleph$.

Это следствие даёт геометрическую характеристику индикатрисы J_a отображения a.

Рассмотрим множество $J_a \cap \pi^0$. В однородных координатах множество $J_f \cap \pi^0$ задаётся системой уравнений:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \underset{0}{X}^\gamma \underset{0}{X}^\delta = 0, \ \Lambda_{\alpha\beta\gamma} \underset{0}{X}^\beta \underset{0}{X}^\gamma = 0, \ \underset{0}{X}^0 = 0.$$

Аналогичным образом можно записать системы уравнений, задающие множества $J_\psi \cap \pi^0$ и $J_\phi \cap \pi^0$.

Рассмотрим конус K_a, образующими которого являются прямые связки $\{C^0\}$, а направляющей − многообразие $J_a \cap \pi^0$.

Теорема 3. *Множество направлений, определяемых в точке* C^0 *конусом* K_a*, совпадает с конусом* $K_a(0)$ *− главных направлений.*

Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ./ М., 1969. Т. 2. С.179—206.

2. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. T. 7, №2. C. 231—240.

3. *Кретов М.В.* Дифференцируемые отображения, ассоциированные с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве / ВИНИТИ./ М., 1981.

4. *Кретов М.В.* Об асимптотических направлениях комплексов гиперквадрик в аффинном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1983. Вып. 14. С. 36—40.

5. *Андреев Б.А.* О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и многообразием $R_H(Q)$ гиперквадрик аффинного пространства // Там же. 1978. Вып. 9. С.11—19.

6. *Кретов М.В.* Дифференцируемые отображения, ассоциированные с многообразиями гиперквадрик // Международная конференция по геометрии и приложениям. Смолян, 1986. С. 23.

7. *Кретов М.В.* О главных прямых дифференцируемых отображений, ассоциированных с многообразиями гиперквадрик // Международная научная конференция, приуроченная к 200-летию со дня рождения Карла Густава Якоби и 750-летию со дня основания г. Калининграда (Кёнигсберга). Калининград, 2005. С. 28—31.

8. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами // Итоги науки «Геометрия-63», / ВИНИТИ./ М., 1965. С. 65—107.

M. Kretov

ABOUT THE MAIN POINTS OF DIFFERENTIATED DISPLAYS ASSOCIATED WITH THE COMPLEX OF HYPERQUADRICS.

Studying of differentiated displays of affine n −space in space central non-degenerate hyperquadrics which images are n −parametrical families hyperquadrics proceeds. The concept of analogue of the main points of dot displays is entered. The geometrical characteristic is given to this analogue.

УДК 514.75

Т.Ю. Максакова

(Российский государственный университет
им. Иммануила Канта)

ДВОЙСТВЕННЫЙ ОБРАЗ *WH*-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ