УДК 514.764.274

***С. Е. Степанов*[1], *И. И. Цыганок*[2]**
[1, 2] Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия
[1, 2] s.e.stepanov@mail.ru

Полная минимальная гиперповерхность в пространстве де Ситтера первого рода

В пространстве де Ситтера первого рода любая пространственноподобная метрически полная минимальная гиперповерхность M с интегрируемой p-степенью скалярной кривизны хотя бы для одного $p > 1$ является сферической пространственной формой.

Ключевые слова: пространство де Ситтера, полная минимальная гиперповерхность, сферическая пространственная форма.

Скалярная кривизна минимальной гиперповерхности в пространстве де Ситтера

Основным результатом этого раздела является

Теорема. *Скалярная кривизна* s *пространственноподобной минимальной гиперповерхности* M *в пространстве де Ситтера* S_1^{n+1} *является положительной субгармонической функцией.*

Доказательство. Рассмотрим пространственноподобную гиперповерхность M в $(n+1)$-мерном $(n \geq 2)$ лоренцевом многообразии (M', g') постоянной кривизны $C = 1$, которое принято называть *пространством де Ситтера 1-го рода* и обозначать как S_1^{n+1}. В этом случае индуцируемая на M метрика g

Поступила в редакцию 06.02.2018 г.
© Степанов С. Е., Цыганок И. И., 2018

положительно определена, а вторая фундаментальная форма F, как это следует из формул (64.14) монографии [2], является *тензором Кодацци* [1, п. 16.7]. Согласно равенствам (64.13) монографии [2]

$$R_{ijkl} = -\left(F_{ik}F_{jl} - F_{il}F_{jk}\right) + \left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\right) \tag{1}$$

для локальных компонент F_{kl}, R_{ijkl} и g_{ij} второй фундаментальной формы F, тензора кривизны R и метрического тензора g гиперповерхности *M*. Если предположить, что *M* является *минимальным подмногообразием* [2, § 52], то F будет бесследовым тензором. В этом случае из (1) следует, что $s - n(n-1) = \| F \|^2 \geq 0$, а потому для минимальной гиперповерхности *M* ее скалярная кривизна $s \geq n(n-1) > 0$. Непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta\| F \|^2 &:= \frac{1}{2} g^{kl} \nabla_k \nabla_l \left(F^{ij} F_{ij}\right) = \\ &= \left(g^{kl} \nabla_k \nabla_l F_{ij}\right) F^{ij} + g^{kl}\left(\nabla_k F_{ij}\right)\left(\nabla_l F^{ij}\right) = \\ &= R_{ij} F^{ik} F_k^j - R_{ijkl} F^{ik} F^{jl} + g^{kl}\left(\nabla_k F_{ij}\right)\left(\nabla_l F^{ij}\right) = \\ &= Q(F) + \| \nabla F \|^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} Q(F) &= R_{ij} F^{ik} F_k^j - R_{ijkl} F^{ik} F^{jl} = \| F \|^2 \left(n + \| F \|^2\right) = \\ &= \left(s - n(n-1)\right)\left(s - n(n-2)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда

$$\Delta s = 2\left(s - n(n-1)\right)\left(s - n(n-2)\right) \geq 0,$$

поскольку $Q(F) \geq 0$. В этом случае заключаем, что s является положительной *субгармонической функцией* [3].

Пространственноподобная гиперповерхность как сферическая пространственная форма

В этом разделе докажем

Следствие. *Пусть M* $\subset S_1^{n+1}$ *является пространственноподобной метрически полной минимальной гиперповерхностью со скалярной кривизной* $s \in L^p(M)$ *хотя бы для одного* $p > 1$. *Тогда M является сферической пространственной формой.*

Доказательство. Напомним теорему Яу из [3]: пусть *f* является неотрицательной субгармонической функцией на полном римановом многообразии *M*. Тогда либо $\int_M f^p dv_g = +\infty$ для всех $p > 1$, либо $f = const$. Пусть $\int_M s^p dv_g < +\infty$ для хотя бы одного $p > 1$ и положительной субгармонической функции *s*, которой в нашем случае является скалярная кривизна гиперповерхности *M*. Тогда $s = const$, и из (2) следует, что $Q(F) = 0$. В этом случае из (3) выводим, что $\| F \|^2 = 0$. Последнее означает, что *M* является *вполне геодезическим подмногообразием* в S_1^{n+1} (см. [2, § 54]). А потому риманово многообразие (M, g) будет *сферической пространственной формой* [4, § 2.4].

Благодарности. *Авторы выражают благодарность РФФИ за поддержку исследований (грант № 16-01-00756-а).*

Список литературы

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М., 1990.
2. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М., 1948.
3. *Yau S.-T.* Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian manifold and Their Applications to Geometry // Indiana Univ. Math. J. 1976. № 7. P. 659—679.
4. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М., 1982.

S. Stepanov[1], *I. Tsyganok*[2]
[1, 2] *Financial University under the Government of the Russian Federation*
49 Leningradsky Prospect, Moscow, 125993, Russia
[1, 2] s.e.stepanov@mail.ru

A complete minimal hypersurface in de Sitter space-time of the first kind

Submitted on February 06, 2018

In the present paper we prove that a complete spacelike minimal hypersurface in de Sitter space-time of the first kind is a spherical space form if it has an integrable p-power of its scalar curvature for some positive p.

Keywords: de Sitter space-time, complete minimal hypersurface, spherical space form.

References

1. *Besse, A.*: Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1987).
2. *Eisenhart, L.P.*: Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, Princeton (1926).
3. *Yau, S.T.:* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry, Indiana Univ. Math. J., **25**:7, 659—679 (1976).
4. *Wolf, J.A.*: Spaces of constant curvature, Univ. of California Press, California (1972).