I. Gordeeva

SIX CLASSES OF NON-SYMMETRIC
METRIC CONNECTIONS

We use the theory of group representations to classify non-symmetric metric connections. We also consider one of such classes.

УДК 514.7

А. И. Долгарев, И. А. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОДУЛЯРНОГО ПРОСТРАНСТВА С ДИССОНОМ

Найдены символы Кристоффеля и формулы Гаусса — Петерсона — Кодацци. Полная кривизна поверхности одулярного галилеева пространства с диссоном не относится к внутренней геометрии поверхности.

Действительные одули Ли определяются на группах Ли посредством введения операции умножения элементов группы Ли на действительные числа. Существует пять видов 3-мерных разрешимых одулей Ли: линейное пространство, растран, сибсон, диссон и осцилляторный одуль [1]. На одулях Ли рассматривается галилеева норма. Наличие внешней операции на одуле Ли позволяет дифференцировать одулярные функции по аналогии с векторными. Заменяя в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства линейное пространство одулем Ли, получаем вейлевские одулярные пространства — ВО-пространства. Ранее исследованы кривые и поверхности всех ВО-пространств, кроме пространства с диссоном. Некоторые результаты опубликованы в выпусках 32—36 настоящего сборника.

Ниже найдены символы Кристоффеля, получены основные уравнения теории поверхностей и в пространстве с диссоном — формулы Гаусса — Петерсона — Кодацци. Оказалось, что полная кривизна поверхности не относится к ее внутренней геометрии.

§ 1. Пространство с диссоном

1.1. ***Нормированный диссон***. На многообразии R^3 диссон задается операциями [1]:

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + y, ye^u + v + zue^u, ze^u + w);$$

$$t(x, y, z) = (xt, y\frac{e^{xt}-1}{e^x-1} + xz(\frac{te^{xt}}{e^x-1} - \frac{e^{xt}-1}{(e^x-1)^2}e^x), z\frac{e^{xt}-1}{e^x-1}), x \neq 0;$$

$$t(0, y, z) = (0, yt, zt), \ t \in \mathrm{R}.$$

Элементы диссона называются диссами. Галилеевой нормой $\|\delta\|$ дисса $\delta = (x, y, z)$ называется

$$\|\delta\| = |X|, \text{ если } X \neq 0; \ \|\delta\| = \sqrt{y^2 + z^2}, \text{ если } x = 0.$$

1.2. ***Кривые и поверхности ЕД-пространства***. ВО-пространство с нормированным диссоном называется ЕД-пространством. Регулярная кривая класса C^3 ЕД-пространства в естественной параметризации задается диссонной функцией

$$\delta(s) = (s, y(s), z(s)), \ s \in \mathrm{I} \subseteq R;$$

ее производная равна

$$\dot{\delta} = (1, (e-1)(\dot{y} - \dot{z} - y) + e(\dot{z} - z), (e-1)(\dot{z} - z)).$$

Кривизна k_1 кривой определяется равенством $k_1 = \|\ddot{\delta}\|$ [1],

$$k_1 = \sqrt{(\ddot{x} - \dot{x} + \frac{1}{e-1}(\ddot{y} - \dot{y}))^2 + (\ddot{y} - \dot{y})^2}.$$

Регулярная поверхность класса C^3 ЕД-пространства в естественной параметризации задается диссонной функцией

$$\delta(u,v) = (v, y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in \mathrm{D} \subseteq \mathrm{R}^2;$$

которая записывается в виде:

$$\delta(u,v) = v\alpha + \vec{r}(u,v),$$

где $\alpha = (1,0,0)$ дисс базиса диссона, а

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

есть векторная функция евклидовой плоскости ЕД-пространства, это векторное поле евклидовой плоскости. Производные функции $\delta(u,v)$ таковы:

$$\delta_u = (0, x_u, y_u),$$

$$\delta_v = (1, (e-1)(x_v - x + \frac{1}{e-1}(y_v - ey)), (e-1)(y_v - y)).$$

$\|\delta_v\| = 1$. Обозначим $(y_v - ey, 0) = \vec{d}$, это евклидов вектор. Имеем

$$\delta_u = \vec{r}_u,\ \delta_v = \alpha + (e-1)(\vec{r}_v - \vec{r}) + \vec{d}.$$

Единичный вектор нормали поверхности есть

$$\vec{n} = (-\frac{y_u}{\|\vec{r}_u\|}, \frac{x_u}{\|\vec{r}_u\|}).$$

Производные второго порядка:

$$\delta_{uu} = \vec{r}_{uu},\ \delta_{uv} = \vec{r}_{uv};\quad \delta_{vu} = (e-1)\ (\vec{r}_{vu} - \vec{r}_u + \frac{1}{e-1}\vec{d}_u);$$

$$\delta_{vv} = (e-1)\ (\vec{r}_{vv} - \vec{r}_v + \frac{1}{e-1}\vec{d}_v).$$

Первая квадратичная форма поверхности:

$$ds^2 = dv^2,\ \text{или}\ ds^2 = Edu^2,\ \text{где}\ \vec{r}_u^{\,2} = E.$$

Вторая квадратичная форма поверхности такова:

$$l = Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2,$$

ее коэффициенты: $A = \vec{r}_{uu}\vec{n}$, $B = \vec{r}_{uv}\vec{n}$,

$$C = \frac{1}{e-1}\delta_{vv}\ \vec{n}\ = (\vec{r}_{vv} - \vec{r}_v + \frac{1}{e-1}\vec{d}_v)\vec{n}\ .$$

Полная (Гауссова) кривизна поверхности равна $K = AC - B^2$.

§ 2. Основные уравнения теории поверхностей

2.1. ***Деривационные формулы***. С каждой точкой P поверхности $\delta(u,v)$ связан репер **Р** = $(P, \delta_u, \delta_v, \vec{n})$. Диссы производных второго порядка функции $\delta(u,v)$ и производные дисса $\vec{n}$ в репере **Р** имеют разложения:

$$\delta_{ij} = \Gamma^1_{ij}\vec{r}_u + \Gamma^1_{ij}\delta_v + A_{ij}\vec{n}\ ,\ \vec{n}_i = B^1_i\vec{r}_u + B^2_i\delta_v + C_i\vec{n}\ ;\ i = 1{,}2\ .$$

Коэффициенты $\varGamma^k_{ij}$ называются символами Кристоффеля.

2.1.1. **Свойство**. $\Gamma^2_{ij} = 0$, $B^2_i = 0$.

Это означает, что производные δ_{ij} являются векторными функциями.

2.1.2. **Свойство**. *Векторы* $\vec{n}_u$ *и* $\vec{n}_v$ *коллинеарны вектору* $\vec{r}_u$.

\# Дисс $\vec{n}$ является единичным вектором, поэтому его производные ему перпендикулярны. Как и в других ВО-пространствах, дифференцируя скалярные произведения $\vec{r}_u\vec{n}$, находим $\vec{n}_u = -\frac{A}{E}\vec{r}_u$, $\vec{n}_v = -\frac{B}{E}\vec{r}_u$.

С учетом того, что на поверхности ЕД-пространства вектор $\vec{r}_u$ определяет главное направление в любой ее точке, получен аналог теоремы Родрига.

2.1.3. **Теорема**. *Производные единичного вектора нормали поверхности коллинеарны вектору главного направления на поверхности.*

Умножая скалярно производные δ_{ij} на вектор $\vec{n}$, получаем $A_{11} = A$, $A_{12} = B$, $A_{21} = (e-1)B + \vec{d}_u\vec{n}$, $A_{22} = (e-1)C$, где $\vec{d} = (y_v - ey, 0)$.

2.2. ***Символы Кристоффеля***. После умножения векторов δ_{ij} скалярно на $\vec{r}_u$ находим:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \ \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \ \Gamma_{21}^1 = (e-1)(\frac{E_v}{2E} - 1) + \frac{\vec{d}\vec{r}_u}{E}, \ \Gamma_{22}^1 = 0.$$

2.2.1. **Теорема**. *Символы Кристоффеля* Γ_{11}^1, Γ_{12}^1, Γ_{22}^1, Γ_{ij}^2 *выражаются через коэффициент* E *первой квадратичной формы поверхности и его производные* E_u, E_v, *а символ* Γ_{21}^1 *выражается не только через* E, E_u, E_v. *В целом символы Кристоффеля не относятся к внутренней геометрии поверхности ЕД-пространства.*

2.2.2. **Теорема**. *Деривационные формулы поверхности ЕД-пространства таковы*:

$$\delta_{uu} = \frac{E_u}{2E}\vec{r}_u + A\vec{n}, \ \delta_{uv} = \frac{E_v}{2E}\vec{r}_u + B\vec{n},$$

$$\delta_{vu} = ((e-1)(\frac{E_v}{2E} - 1) + \frac{\vec{d}\vec{r}_u}{E})\vec{r}_u + ((e-1)B + \vec{d}_u\vec{n})\vec{n},$$

$$\delta_{vv} = (e-1)C\vec{n}, \ \vec{n}_u = -\frac{A}{E}\vec{r}_u, \ \vec{n}_v = -\frac{B}{E}\vec{r}_u.$$

2.3. ***Формулы Гаусса — Петерсона — Кодацци***. Сравнивая производные $\vec{n}_{uv}, \vec{n}_{vu}$ и $\delta_{uuv}, \delta_{uvu}$, как и в других ВО-пространствах [1], получаем первую формулу Петерсона — Кодацци:

$$AE_v - BE_u = 2E(A_v - B_u).$$

Далее находим

$$\delta_{vvu} = (e-1)(\vec{r}_{vvu} - \vec{r}_{vu}) + \vec{d}_{vu}, \ \delta_{vuv} = (e-1)(\vec{r}_{vuv} - \vec{r}_{uv}) + \vec{d}_{uv}.$$

Эти производные равны между собой, но дифференцирования деривационных формул δ_{vv} и δ_{vu} дают различные выражения, которые и сравниваются на основании полученных равенств.

Продифференцируем третью и четвертую деривационные формулы:

$$\delta_{vuv} = (e-1)B_v\vec{n} + (\vec{d}_u\vec{n})_v\vec{n} - (e-1)\frac{B^2}{E}\vec{r}_u - (\vec{d}_u\vec{n})\frac{B}{E}\vec{r}_u,$$

$$\delta_{vvu} = (e-1)C_u\vec{n} - (e-1)\frac{CA}{E}\vec{r}_u.$$

Из равенства коэффициентов при $\vec{r}_u$ и $K = AC - B^2$ имеем:

$$K = \frac{E_v{}^2 - 2E_{vv}E + 2E_vE}{4E^2} - Ed_1,$$

где $d_1 = \frac{1}{e-1}((\frac{\vec{d}_u\vec{r}_u}{E})_v + \frac{\vec{d}_u\vec{r}_u}{E}\frac{E_v}{2E} - \vec{d}_u\vec{n}\frac{B}{E})$; это формула Гаусса. Из равенства коэффициентов при $\vec{n}$ имеем:

$$(E_v - 2E)B = 2E(C_u - B_v) + 2E\vec{d}_2,$$

где $d_2 = \frac{1}{e-1}(\frac{\vec{d}_u\vec{r}_u}{E}B + (\vec{d}_u\vec{n})_v)$.

Это вторая формула Петерсона — Кодацци. Производные δ_{uv} и δ_{vu} различны, и при дальнейшем дифференцировании не получается одинаковых выражений, что не дает возможности сравнивать δ_{uvv} и δ_{vuv} или δ_{uvu} и δ_{vuu}. Сравнение остальных производных третьего порядка функции δ не приводит к новым соотношениям.

На основании формулы Гаусса справедлива

2.3.1. **Теорема**. *Полная кривизна поверхности ЕД-пространства не относится к внутренней геометрии поверхности.*

\# Формула зависит не только от коэффициента E первой квадратичной формы поверхности и его производных E_v, E_{vv}, но и от других функций. #

Такое же утверждение выполняется и в одулярной геометрии пространства с сибсоном [1].

Список литературы

1. *Долгарев А.И.* Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств: Монография. Пенза, 2005.

A. Dolgarew, I. Dolgarew

THE FUNDAMENTAL EQUATIONS OF THE THEORY OF SURFACES OF ODULAR SPACE WITH DISSONE

Symbols of Christoffel and formulas of a Gauss — Peterson — Codazzi are defined. The total curvature of a surface of odular Galilean space with dissone does not concern to internal geometry of a surface.

УДК 514.7

И. А. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

ПОВЕРХНОСТИ 3-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ГАЛИЛЕЯ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ФУНКЦИЯМИ ТОЛЬКО ВРЕМЕНИПОДОБНОГО ПАРАМЕТРА ИЛИ ТОЛЬКО ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНОГО ПАРАМЕТРА

Выявлены случаи порождаемости поверхности классического 3-мерного галилеева пространства-времени коэффициентом ее первой квадратичной формы, установлен вид таких поверхностей.

Существует несколько видов 3-мерных одулярных галилеевых пространств, определенных в аксиоматике Г. Вейля [1]. Среди них выделяется классическое галилеево пространство-время, в основе которого лежит галилеево векторное пространство; ниже оно называется пространством Галилея. Базис векторного