УДК 514.76

Н.Д. Никитин, О.Г. Никитина
Пензенский государственный университет, Россия
nikitina1005@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-2

Аффинные преобразования касательного расслоения общего пространства путей

Исследуются инфинитезимальные преобразования касательного расслоения общего пространства путей. Общее пространство путей является обобщением пространства аффинной связности. По аффинной связности общего пространства путей построена аффинная связность на касательном расслоении. Для инфинитезимального преобразования касательного расслоения составлена система уравнений инвариантности построенной аффинной связности. Эта система является системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонентов инфинитезимального преобразования. Основные результаты статьи получены посредством анализа этой системы с учетом свойств однородных функций. Показано, что полный лифт инфинитезимального преобразования базы является инфинитезимальным аффинным движением касательного расслоения тогда и только тогда, когда инфинитезимальное преобразование базы является аффинным движением в общем пространстве путей. Найдены необходимые и достаточные условия того, что инфинитезимальное преобразование касательного расслоения, порожденное вертикальным векторным полем, оставляет инвариантной аффинную связность касательного расслоения. Приводятся условия, которые являются также необходимы-

Поступила в редакцию 16.04.2023 г.

ми и достаточными, чтобы сохраняющее слои инфинитезимальное преобразование касательного расслоения с аффинной связностью являлось аффинным движением.

Ключевые слова: касательное расслоение, общее пространство путей, производная Ли, инфинитезимальное аффинное преобразование

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие, $T(M)$ — его касательное расслоение, $\pi: T(M) \to M$ — каноническая проекция.

Общее пространство путей [1] есть пара (M, H), где H — дифференциально-геометрический объект, заданный на касательном расслоении. Пусть (x^i), где $i = \overline{1,n}$, — система координат окрестности $U \subset M$. В окрестности $\overline{U} = \pi^{-1}(U)$ относительно индуцированных координат (x^i, x^{n+j}), где $i, j = \overline{1,n}$, объект H имеет компоненты $H^i(x^1, \dots, x^n,\ x^{n+1}, \dots, x^{2n})$, однородные второй степени относительно слоевых координат $x^{n+1}, \dots, x^{2n}$.

Векторное поле $X \in F(U)$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием в общем пространстве путей тогда и только тогда, когда

$$L_{X^C} \Gamma_{ij}^h = 0. \tag{1}$$

L_{X^C} — обозначение производной Ли вдоль полного лифта векторного поля X [2], $\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^h}{\partial x^{n+i} \partial x^{n+j}}$ — компоненты аффинной связности Γ общего пространства путей. Условие (1) равносильно условию $L_{X^C} H^h = 0$.

В [3] по аффинной связности Γ общего пространства путей строится аффинная связность Γ^C на касательном расслоении $T(M)$. Если база касательного расслоения — пространство аффинной связности (M, ∇), то $\Gamma^C = \nabla^C$.

Аффинная связность Γ^C называется *полным лифтом аффинной связности Γ* общего пространства путей.

В локальных координатах (x^i, x^{n+j}) окрестности $\bar{U}$ объект Γ^C имеет компоненты

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{n+i\,j}^h = \bar{\Gamma}_{i\,n+j}^h = \bar{\Gamma}_{n+i\,n+j}^h = 0, \bar{\Gamma}_{ij}^{n+h} = x^{n+\sigma}\delta_\sigma \Gamma_{ij}^h,$$

$$\bar{\Gamma}_{n+i\,j}^{n+h} = \bar{\Gamma}_{i\,n+j}^{n+h} = \Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{n+i\,n+j}^{n+h} = 0 \ \ (i, j, h, \sigma = \overline{1, n}). \qquad (2)$$

В (2)

$$\delta_\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} + \Gamma_\sigma^\rho \frac{\partial}{\partial x^{n+\rho}}, \ \Gamma_\sigma^\rho = \ \Gamma_{\sigma\beta}^\rho x^{n+\beta} \ \ (\rho, \beta = \overline{1, n}).$$

Запишем уравнения инфинитезимального аффинного преобразования $\bar{X} = \xi^A(x^1, \dots, x^{2n}) \frac{\partial}{\partial x^A}$ касательного расслоения $T(M)$ со связностью Γ^C:

$$\partial_{BC}^2 \xi^A - \partial_D \xi^A \bar{\Gamma}_{BC}^D + \partial_B \xi^D \bar{\Gamma}_{DC}^A +$$
$$+\partial_C \xi^D \bar{\Gamma}_{BD}^A + \xi^D \partial_D \bar{\Gamma}_{BC}^A = 0 \ \ (A, B, C, D = \overline{1, 2n}). \qquad (3)$$

Для инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения с аффинной связностью Γ^C следующие утверждения.

Теорема 1. *Полный лифт X^C векторного поля X окрестности U многообразия M является инфинитезимальным аффинным преобразованием касательного расслоения $T(M)$ с аффинной связностью Γ^C тогда и только тогда, когда X является инфинитезимальным аффинным преобразованием общего пространства путей.*

Доказательство. Пусть

$$X^C = \xi^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} + x^{n+\sigma} \partial_\sigma \xi^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^{n+i}}$$

— полный лифт векторного поля

$$X = \xi^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i, \sigma = \overline{1, n}),$$

заданного на многообразии M, является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$. Из дифференциальных уравнений (3) при $A, B, C = \overline{1, n}$ получим, что $L_{X^C}\Gamma_{ij}^h = 0$. Значит, X является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве путей. Пусть теперь векторное поле X является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве путей. Тогда в силу (1) нетрудно показать, что $L_{X^C}\bar{\Gamma}_{BC}^A = 0$, где $\bar{\Gamma}_{BC}^A$ — компоненты объекта связности Γ^C. Следовательно, X^C является аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$. Теорема доказана.

Векторное поле $\bar{X}$ касательного расслоения $T(M)$ называется вертикальным [4], если для любой дифференцируемой функции f на многообразии M выполняется условие $\bar{X}(f^V) = 0$, где f^V — вертикальный лифт функции f, заданной на M, в касательное расслоение. В локальных координатах $\left(x^i, x^{n+j}\right)$ окрестности $\bar{U}$

$$\bar{X} = \xi^{n+i}(x^1, \dots, x^{2n})\frac{\partial}{\partial x^{n+i}}.$$

Теорема 2. *Вертикальное векторное поле $\bar{X}$ на $T(M)$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

a) $\bar{X} = D^V + {}^{VX}C$, где D^V — вертикальный лифт инфинитезимального аффинного преобразования

$$D = D^\alpha(x^1, \dots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

в общем пространстве путей,

$${}^{VX}C = C_\beta^h(x^1, \dots, x^n)x^{n+\beta}\frac{\partial}{\partial x^{n+h}}$$

— вертикально-векторное поднятие аффинора $C_\beta^h(x^1, \dots, x^n)$, заданного на базе M [5]*;*

b) $D^\beta\, \Gamma_{ij\beta}^h = 0$, $\Gamma_{ij\beta}^h\, \nabla_s\, D^\beta x^{n+s} = 0$;

c) $\nabla_j C_i^h = 0,\ C_\alpha^\beta x^{n+\alpha} \Gamma_{ij\beta}^h = 0,$

$$\left(C_\beta^h K_{i\,\alpha\,j}^\beta + C_\alpha^s K_{j\,i\,s}^h\right) x^{n+\alpha} = 0.$$

В условиях b), c) теоремы 2 ∇_j *— ковариантная производная относительно связности Г,* $K_{i\,\alpha\,j}^\beta$ *— компоненты тензора кривизны общего пространства путей,* $\Gamma_{ij\beta}^h = \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^{n+\beta}}$ $(i, j, h, s, \alpha, \beta = \overline{1, n})$.

Доказательство. Пусть вертикально-векторное поле

$$\bar{X} = \xi^{n+i}(x^1, \dots, x^{2n}) \frac{\partial}{\partial x^{n+i}} \ (i = \overline{1, n})$$

касательного расслоения *T*(*M*) является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$. Исследуем уравнения (3), составленные для инфинитезимального аффинного преобразования $\bar{X}$. Из (3) при $A, B, C = \overline{n+1, 2n}$ имеем

$$\xi^{n+i} = C_\alpha^i(x^1, \dots, x^n) x^{n+\alpha} + D^i(x^1, \dots, x^n) \ (i, \alpha = \overline{1, n}).$$

При допустимых преобразованиях координат

$$\bar{x}^i = f\,(x^1, \dots, x^n), \qquad \bar{x}^{n+i} = \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} x^{n+\alpha}$$

окрестности $\bar{U}$, составляющие $C_\alpha^i(x^1, \dots, x^n)$, преобразуются как компоненты тензорного поля (1, 1), а $D^i(x^1, \dots, x^n)$ — как компоненты векторного поля на *M*. Для тензорного поля $C(C_\alpha^i)$ и векторного поля $D = D^\alpha(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ сопоставим на $T(M)$ векторные поля

$${}^{VX}C = C_\alpha^i(x^1, \dots, x^n)\, x^{n+\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{n+i}},\ D^V = D^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^{n+i}}.$$

Тогда векторное поле $\bar{X} = {}^{VX}C + D^V$. Учитывая, что

$$\xi^{n+i} = C_\alpha^i(x^1, \dots, x^n) x^{n+\alpha} + D^i(x^1, \dots, x^n),$$

из (3) при следующих значениях индексов A, B, C:

$a)\ A, B, C = \overline{1,n}$;

$b)\ A = \overline{n+1, 2n},\ B, C = \overline{1,n}$;

$c)\ A, C = \overline{n+1, 2n},\ B = \overline{1,n}$

получим:

$$D^{\beta}\, \Gamma^{h}_{i\,j\,\beta} = 0,\ C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha} \Gamma^{h}_{i\,j\,\beta} = 0,$$

$$\partial_{ij}\, C^{h}_{\alpha} x^{n+\alpha} - \Gamma^{\beta}_{ij}\, \partial_{\beta} C^{h}_{\alpha} x^{n+\alpha} - C^{h}_{\beta}\left(x^{n+\alpha} \partial_{\alpha} \Gamma^{\beta}_{ij} - x^{n+\alpha} \Gamma^{s}_{\alpha}\, \Gamma^{\beta}_{ijs}\right) +$$

$$+ \Gamma^{h}_{\beta j} \partial_{i} C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha} + \Gamma^{h}_{i\beta}\, \partial_{j} C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha} + C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha} (\partial_{\beta} \Gamma^{h}_{ij} +$$

$$+ x^{n+s} \partial_{s}\, \Gamma^{h}_{ij\beta} - 2\, \Gamma^{\alpha}_{\beta}\, \Gamma^{h}_{ij\alpha} - x^{n+s}\, \Gamma^{\alpha}_{s}\, \Gamma^{h}_{ij\alpha\beta}) = 0, \tag{4}$$

$$L_{D^C}\, \Gamma^{h}_{ij} = \Gamma^{h}_{ij\beta}\, \nabla_{s}\, D^{\beta} x^{n+s}, \tag{5}$$

$$\nabla_{i}\, C^{h}_{j} = 0. \tag{6}$$

Здесь ∇_i — обозначение ковариантной производной относительно связности Γ общего пространства путей, D^C — полный лифт векторного поля $D = D^{\alpha}(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ с базы на касательное расслоение, L_{D^C} — обозначение производной Ли вдоль векторного поля D^C, $\Gamma^{h}_{ij\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{h}_{ij\alpha}}{\partial x^{n+\beta}}$.

В (4)—(6) индексы $i, j, h, \alpha, \beta, s$ принимают значения от 1 до n.

Если обе части соотношения (5) умножим на $x^{n+i} x^{n+j}$ и просуммируем по i, j, то в силу $\Gamma^{h}_{ij\beta}\, x^{n+i} = 0$ получим, что $\left(L_{D^C}\, \Gamma^{h}_{ij}\right) x^{n+i} x^{n+j} = 0$. Из этого соотношения, учитывая, что $L_{D^C} x^{n+i} = 0$ и $H^h = \Gamma^{h}_{ij}\, x^{n+i} x^{n+j}$, имеем $L_{D^C} H^h = 0$. Значит, векторное поле D является инфинитезимальным аффинным движением в пространстве путей. Но тогда из (5) следует, что $\Gamma^{h}_{ij\beta}\, \nabla_{s}\, D^{\beta} x^{n+s} = 0$. Из (4) с учетом (6) получим, что

$$\left(C^{h}_{\beta} K^{\beta}_{i\,\alpha j} + C^{s}_{\alpha} K^{h}_{i\,j\,s}\right) x^{n+\alpha} + C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha} x^{n+s} \partial_{s} \Gamma^{h}_{j\,i\,\beta} -$$

$$- C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha} (\Gamma^{s}_{\beta} \Gamma^{h}_{i\,j\,s} - x^{n+s} \Gamma^{v}_{s}\, \Gamma^{h}_{i\,j\,v\beta})\,. \tag{7}$$

В (7) K^h_{ijs} — компоненты тензора кривизны *K* общего пространства путей. Если продифференцируем соотношения $C^\beta_\alpha x^{n+\alpha} \Gamma^h_{j\,i\,\beta} = 0$ по x^s, а затем по индексу *s* просуммируем с x^{n+s}, то, учитывая (6), придем к соотношениям

$$C^\beta_\alpha x^{n+\alpha} x^{n+s} \partial_s \Gamma^h_{j\,i\,\beta} = -\Gamma^h_{j\,i\,\beta} \left(C^\beta_v \Gamma^v_{s\alpha} - C^v_\alpha \Gamma^\beta_{sv} \right) x^{n+s} x^{n+\alpha}. \quad (8)$$

Из $C^\beta_\alpha x^{n+\alpha} \Gamma^h_{j\,i\,\beta} = 0$ нетрудно также получить, что

$$\Gamma^v_s x^{n+s} \Gamma^h_{j\,i\,v\beta} C^\beta_\alpha x^{n+\alpha} = -\, C^\beta_v \Gamma^h_{j\,i\,\beta} \Gamma^v_s x^{n+s}. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) из (7) следует, что

$$\left(C^h_\beta K^\beta_{i\,\alpha\,j} + C^s_\alpha K^h_{j\,i\,s} \right) x^{n+\alpha} = 0.$$

Таким образом, показано, что если вертикальное векторное поле $\bar{X}$ на *T*(*M*) является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$, то для поля $\bar{X}$ выполняются условия *a*), *b*), *c*). Справедливо и обратное утверждение. Любое векторное поле $\bar{X} = D^V + {}^{VX}C$, где D — инфинитезимальное аффинное движение в пространстве путей, ${}^{VX}C$ — вертикально-векторное поднятие аффинора $C^i_\alpha(x^1, \dots, x^n)$ с базы *M* на касательное расслоение *T*(*M*), для которого выполняются условия *b*), *c*), является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$.

Теорема 3. *Инфинитезимальное преобразование* $\bar{X}$ *касательного расслоения T(M), сохраняющее слои, является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве* $(T(M), \Gamma^C)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\bar{X} = X^C + D^V + C^{VX},$$

где X^C, D^V *— соответственно полный и вертикальный лифты инфинитезимальных аффинных преобразований*

$$X = \xi^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad D = D^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

в пространстве путей на T(M), C^{VX} *— вертикально-векторное поднятие аффинора* $C_{\alpha}^{i}(x^1, \dots, x^n)$ *с базы M на касательное расслоение T(M), и выполняются условия b), c) теоремы 2.*

Доказательство. Пусть $\bar{X}$ — инфинитезимальное аффинное преобразование в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$, которое сохраняет слои. Так как $\bar{X}$ сохраняет слои, то в локальных координатах $(x^i,\ x^{n+j})$ окрестности $\bar{U}$ первые *n* компонент поля не зависят от слоевых координат $x^{n+1}, \dots, x^{2n}$,

$$\bar{X} = \ \xi^i(x^1, \dots, x^n)\ \frac{\partial}{\partial x^i} + \ \xi^{n+i}(x^1, \dots, x^{2n})\ \frac{\partial}{\partial x^{n+i}}.$$

Обозначим через *X* проекцию векторного поля $\bar{X}$ на базу *M*, $X = \ \xi^i(x^1, \dots, x^n)\ \frac{\partial}{\partial x^i}$. Из уравнений (3), составленных для инфинитезимального аффинного преобразования $\bar{X}$ при $A, B, C = \overline{1,n}$, получим, что $L_X cH^h = 0$. Значит, *X* является инфинитезимальным аффинным преобразованием в общем пространстве путей. Но тогда в силу теоремы 1 векторное поле X^C является аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$. В силу свойства производной Ли вертикальное векторное поле $Y = \bar{X} - X^C$ является аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$. Согласно теореме 2, $Y = D^V + {}^{VX}C$, где *D* — инфинитезимальное аффинное преобразование в пространстве путей и выполняются условия *b*), *c*) теоремы 2. Значит, $\bar{X} = X^C + D^V + C^{VX}$.

Справедливо и обратное утверждение. Любое векторное поле $\bar{X} = X^C + D^V + C^{VX}$ касательного расслоения $T(M)$, где X^C, D^V — соответственно полный и вертикальный лифты инфинитезимальных аффинных преобразований *X*, *D* в пространстве путей, ${}^{VX}C$ — вертикально-векторное поднятие аффинора $C_{\alpha}^{i}(x^1, \dots, x^n)$ с базы *M* на касательное расслоение $T(M)$, при выполнении условий *b*), *c*) теоремы 2 является аффинным движением в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$.

Список литературы

1. *Douglas J.* The general geometry of pahts // Annalas of Math. 1928. Vol. 29. P. 143—168.

2. *Yano K.* The theory of Lie derivaruves and its applications. Amsterdam, 1957.

3. *Yano K., Okubo T.* On the tangent bundles of generalized spaces of pahts // Rendicondi di matematica. 1971. Vol. 4, №2. P. 327—346.

4. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry. N.Y., 1973.

5. *Каган Ф.И.* Каноническое разложение проективно-киллинговых и аффинно-киллинговых векторов на касательном расслоении // Матем. заметки. 1976. Т. 19, вып. 2. С. 247—258.

6. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

7. *Никитин Н.Д.* Об аффинных движениях в общих пространствах путей // Изв. вузов. Математика. 1996. №2. С. 21—25.

8. *Никитин Н.Д.*, *Никитина О.Г.* Инфинитезимальные преобразования аффинной связности касательного расслоения пространства нелинейной связности // ДГМФ. 2013. Вып. 44. С. 95—100.

Для цитирования: *Никитин Н.Д., Никитина О.Г.* Аффинные преобразования касательного расслоения общего пространства путей // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 18—28. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-2.

MSC 2010: 53A35

N. D. Nikitin, O. G. Nikitina
Penza State University
37, Lermontova St., Penza, 440026, Russia
nikitina1005@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-2

Affine transformations of the tangent bundle of a common path space

Submitted on April 16, 2023

In this paper, we study infinitesimal transformations of the tangent bundle of a common path space. The general path space is a generalization space of the affine connectivity. By affine connectivity of the common path space, we construct an affine connection on the tangent bundle. For the infinitesimal transformation of the tangent bundle, a system of invariance equations for the constructed affine connectivity is compiled. This system is a system of second-order differential equations with respect to the components of the infinitesimal transformation. The main results of the article are obtained by analyzing this system taking into account the properties of homogeneous functions. It is shown that the complete lift of an infinitesimal transformation of base is an infinitesimal affine motion of a tangent bundle if and only if the infinitesimal transformation of base is an affine motion in the general path space. Necessary and sufficient conditions are found that the infinitesimal transformation of a tangent bundle generated by a vertical vector field leaves the affine connectivity of the tangent bundle invariant. Conditions are given that are necessary and sufficient so that the infinitesimal transformation of a tangent bundle with affine connectivity that preserves layers is an affine motion.

Keywords: tangent bundle, general path space, Lie derivative, infinitesimal affine transformation

References

1. *Douglas, J.:* The general geometry of pahts. Annalas of Math., 29, 143—168 (1928).

2. *Yano, K.:* The theory of Lie derivaruves and its applications. Amsterdam (1957).

3. *Yano, K., Okubo, T.:* On the tangent bundles of generalized spaces of pahts. Rendicondi di matematica, **4**:2, 327—346 (1971).

4. *Yano, K., Ishihara, S.:* Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry. New York (1973).

5. *Kagan, F.I.:* Canonical decomposition of projective-killing and affine-killing vectors on a tangent bundle. Math. Notes, **19**:2, 247—258 (1976).

6. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Foundations of differential geometry, 1. Moscow (1981).

7. *Nikitin, N.D.:* On affine motions in general path spaces. Izvestiya vuzov. Math., 2, 21—25 (1996).

8. *Nikitin, N. D., Nikitina, O. G.:* Infinitesimal transformations of affine connectivity of tangent bundle of spaces of nonlinear connectivity. DGMF, 44, 95—100 (2013).

For citation: Nikitin, N. D., Nikitina, O. G. Affine transformations of the tangent bundle of a common path space. DGMF, 54 (2), 18—28 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-2.