Об авторах

Олег Владимирович Толстель — канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: tolstel.oleg@mail.ru

Артем Олегович Чурилов — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: artem_churilov@mail.ru

Сергей Валериевич Нестеров — канд. техн. наук, Калининград.
E-mail: serg0044@mail.ru

About autors

Dr Oleg Tolstel' — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: tolstel.oleg@mail.ru

Artem Churilov — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: artem_churilov@mail.ru

Dr Sergei Nesterov — Kaliningrad.
E-mail: serg0044@mail.ru

УДК 532.591

А. А. Зайцев, П. А. Кулаков

НОВЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается новый способ решения задачи о синусоидальных волнах на поверхности однородной идеальной жидкости. Его особенность заключается в том, что вместо потенциала скорости используются исходные характеристики волнового движения: горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, а также давление. Отмечено, что это позволит обобщить рассматриваемую задачу на случай многослойной жидкости. Полученные результаты, в том числе дисперсионное соотношение, полностью согласуются с известными. Специально рассмотрено длинноволновое приближение.

We consider a new way of solving the problem of the sinusoidal wave on the surface of a homogeneous perfect fluid. Its feature is used instead of the potential speed of the original characteristics of wave motion: horizontal and vertical components of the velocity and pressure. It is noted that it will generalize

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 4. С. 48—55.

the problem under consideration in the event of a multi-layer liquid. The results, including the dispersion relation, fully consistent with the known. Specially considered long-wave approximation.

Ключевые слова: однородная идеальная жидкость, новая методика изучения синусоидальных волн, горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, давление, длинноволновое приближение.

Key words: homogeneous ideal fluid, a new method of studying of sinusoidal waves, horizontal and vertical components of velocity, pressure, long-wave approach.

Введение

Задача о синусоидальных волнах на поверхности однородной идеальной жидкости неоднократно рассматривалась, в том числе в учебной литературе (см.: [1]). Основой существующей методики был потенциал скорости. На наш взгляд, это препятствует обобщению задачи на случай многослойной жидкости. Поэтому мы сочли нужным создать методику, основанную на использовании исходных характеристик волнового движения: горизонтальной и вертикальной компонент скорости, а также давления.

Таким образом, ставится цель заново рассмотреть решение задачи о синусоидальных волнах на поверхности однородной идеальной жидкости. Основной характеристикой волнового движения является профиль волны (отклонение уровня от среднего горизонтального положения). В случае синусоидальной волны выражение для ее профиля имеет следующий вид:

$$\eta = a\exp(i\theta),\ a \neq 0,\ \ \theta = \omega t - kx, \tag{1}$$

где a — амплитуда волны, θ — фаза, ω — частота, k — волновое число.

Замечание 1. Выражение (1) показывает, в частности, что среднее значение профиля синусоидальной волны равно нулю:

$$\langle \eta(x) \rangle = 0. \tag{2}$$

Здесь (и в аналогичных ситуациях) осреднение проводится по периоду волны. Физический смысл условия (1) следующий: при появлении волнения объемы жидкости выше среднего горизонтального уровня и ниже его *одинаковые*. Кроме того, условие (2) фактически определяет глубину жидкости.

Переходим к математической постановке рассматриваемой задачи. Здесь следует обратить внимание на неопределенность, вызванную неоднозначностью горизонтальной скорости u. Она заключается в следующем: пусть получено решение задачи, постановка которой будет дана ниже. Тогда для любого постоянного значения u_0 преобразование

$$u \to u + u_0 \tag{3}$$

при прежних значениях v и p тоже, как нетрудно убедиться, дает решение нашей задачи.

Причина неопределенности проста: преобразованию (3) соответствует дрейф волны. Поскольку нас интересуют волны в чистом виде, мы должны отфильтровать его. Это будет сделано с помощью условия нулевого среднего, которое включим в постановку задачи.

Существует еще одна существенная неопределенность, которую мы устраним следующим требованием: *рассматриваемые движения жидкости являются потенциальными*. В связи с этим заметим, что учет *завихренности* в сколько-нибудь полной степени вряд ли возможен.

Кроме того, следует учесть, что *полное давление p является суммой статической и динамической составляющих*,

$$p = p_s + p_d, \tag{4}$$

причем статическая составляющая давления p_s зависит только лишь от вертикальной координаты,

$$p_s = p_s(y).$$

После этих необходимых замечаний можно перейти к формулировке постановки задачи о синусоидальных волнах в однородной жидкости.

Постановка задачи о синусоидальных волнах в однородной жидкости. Требуется найти обе компоненты скорости, а также давление, которые в слое $-h < y < 0$ удовлетворяют системе четырех дифференциальных уравнений

$$\rho u_t + p_x = 0,\ \rho v_t + p_y + g\rho = 0,\ \ u_x + v_y = 0,\ \ u_y - v_x = 0, \tag{5}$$

граничным условиям на дне

$$v = 0 \text{ при } y = -h, \tag{6}$$

и на свободной поверхности (из них первое является кинематическим, а второе — динамическим)

$$v = \eta_t = i\omega a\exp(i\theta) \text{ при } y = 0, \tag{7}$$

$$p = 0 \text{ при } y = \eta, \tag{8}$$

условиям периодичности

$$u(x + 2\pi/k, y) = u(x, y),\ \ v(x + 2\pi/k, y) = v(x, y), p(x + 2\pi/k, y) = p(x, y), \tag{9}$$

условию отсутствия дрейфа

$$\langle u(x, y)\rangle = 0. \tag{10}$$

Переходим к процедуре решения поставленной задачи.

Сначала упростим систему дифференциальных уравнений (5) и условий (6—10), используя специальное представление для характеристик волнового движения, основанное на выражении (1) для профиля синусоидальной волны. Здесь будет использован следующий простой факт: согласно методу комплексных амплитуд решение системы дифференциальных уравнений (5) следует искать с учетом формулы (1) и граничного условия (8) в следующем виде:

$$u = u_r(y)\exp(i\theta),\ v = v_r(y)\exp(i\theta),\ p_d = p_r(y)\exp(i\theta). \tag{11}$$

Далее следует выражения (11) последовательно подставлять в уравнения (5) и условия (6—10). Однако, поскольку первые два уравнения системы (5) содержат полное давление p, выражение для которого пока еще не получено, то нам следует получить это выражение. Оформим вывод этого выражения в качестве самостоятельной процедуры.

Процедура вывода развернутого выражения для полного давления p

$$p = p_s + p_d,\ p_s = p_s(y),\ p_d = p_r(y)\exp(i\theta) \to$$
$$\to p = p_s + p_d = p_s(y) + p_r(y)\exp(i\theta) \to \tag{12}$$
$$\to p = p_s(y) + p_r(y)\exp(i\theta).$$

Процедура завершена.

Результатом выполнения основной процедуры стала система дифференциальных уравнений, граничных и других условий для функций $u_r(y)$, $v_r(y)$, $p_r(y)$, $p_s(y)$

$$-iku_r(y) + v_r'(y) = 0,\ u_r'(y) + ikv_r(y) = 0. \tag{13}$$

Аналогичная процедура приводит к следующим граничным условиям на свободной поверхности и на дне:

$$p_s\big|_{y=0} = g\rho a,\ \ v_r\big|_{y=0} = i\omega a,\ \ v_r\big|_{y=0} = 0. \tag{14}$$

Переходим к процедуре решения новой задачи. На первом этапе сводим систему (13) к одному дифференциальному уравнению для $v_r(y)$: линейному однородному дифференциальному уравнению (ЛОДУ) 2-го порядка:

$$v_r''(y) - k^2v_r(y) = 0. \tag{15}$$

Это дифференциальное уравнение снабжается граничными условиями (14) при $y = 0$ и при $y = -h$.

Объединяя ЛОДУ (15) и граничные условия (14), получаем следующую постановку краевой задачи для функции $v_r(y)$.

Вспомогательная краевая задача. Найти функцию $v_r(y)$, которая подчиняется следующему **ЛОДУ 2-**го порядка:

$$v_r''(y) - k^2v_r(y) = 0,$$

а также таким двум граничным условиям:

$$v_r(0) = i\omega a,\ v_r(-h) = 0.$$

Процедура решения вспомогательной краевой задачи. Сначала получим общее решение ЛОДУ 2-го порядка в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений (ФСР). В данном случае можно взять ФСР = $\{\mathrm{sh}(k(y + h)), \mathrm{ch}(k(y + h))\}$. Действительно, обе функции удовлетворяют ЛОДУ (15), и они линейно независимы.

Согласно теории линейных однородных дифференциальных уравнений, общее решение ЛОДУ (15) можно записать в следующем виде:

$$v_r(y) = c\,\mathrm{sh}(k(y + h)) + c_1\mathrm{ch}(k(y + h)),$$

где c и c_1 — произвольные вещественные константы. Для их определения используем граничные условия (14).

Следствием третьего из граничных условий (14) является равенство $c_1 = 0$. Тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Общее решение ЛОДУ 2-го порядка* (15), *подчиняющееся нулевому граничному условию на дне* (14), *дается следующей формулой*:

$$v_r(y) = c\,\mathrm{sh}(k(y+h)), \tag{16}$$

где c — произвольная вещественная константа.

Теперь несложно удовлетворить граничному условию на свободной поверхности (14) путем подстановки туда выражения (16) для функции $v_r(y)$. Результатом будет равенство

$$c = \frac{i\omega}{\mathrm{sh}(kh)}a. \tag{17}$$

Таким образом, фактически доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Решение вспомогательной краевой задачи для функции* $v_r(y)$ *существует, единственно и дается следующей формулой*:

$$v_r(y) = a\,\frac{i\omega\,\mathrm{sh}(k(y+h))}{\mathrm{sh}(kh)}. \tag{18}$$

Итак, выражение для вертикальной составляющей скорости частиц жидкости найдено. Переходим к определению выражения для горизонтальной составляющей скорости. Эта несложная процедура заключается в подстановке в первое из уравнений (13) выражения (18). Результатом будет следующее выражение для функции $u_r(y)$:

$$u_r(y) = a\,\frac{\omega\,\mathrm{ch}(k(y+h))}{\mathrm{sh}(kh)}. \tag{19}$$

Таким образом, выражение для функции $u_r(y)$ тоже получено. Теперь следует выполнить анализ единственного граничного условия для этой функции — второго граничного условия (14). Он несложный и его результатом будет хорошо известное дисперсионное соотношение для синусоидальных волн в однородной жидкости:

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kh). \tag{20}$$

Полезно получить выражения для функций $u_r(y)$ и $v_r(y)$, в которых частота ω заменена на ее зависимость от волнового числа k, которую дает формула (20). Выполняя процедуру расчета обоих выражений, получаем такой результат:

$$u_r(y) = a\sqrt{\frac{2gk}{\mathrm{sh}(2kh)}}\,\mathrm{ch}(k(y+h)),\; v_r(y) = ia\sqrt{\frac{2gk}{\mathrm{sh}(2kh)}}\,\mathrm{sh}(k(y+h)). \tag{21}$$

Аналогичное выражение для функции $p_r(y)$ имеет следующий вид:

$$p_r(y) = g\rho a\,\frac{\mathrm{ch}(k(y+h))}{\mathrm{ch}(kh)}. \tag{22}$$

Теперь можно сформулировать утверждение о существовании и единственности решения краевой задачи для функций $u_r(y)$ и $v_r(y)$, постановка которой дана в начале этого пункта.

Утверждение 3. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы решение краевой задачи для функций $u_r(y)$ и $v_r(y)$, которые удовлетворяют следующей нормальной системе дифференциальных уравнений*:

$$u_r'(y) = -ikv_r(y),\ v_r'(y) = iku_r(y),$$

а также граничным условиям

$$u_r(0) = \varepsilon\frac{gk}{\omega}a,\ v_r(0) = i\omega a,\ v_r(-h) = 0,$$

является такая зависимость частоты ω от волнового числа k:

$$\omega = \sqrt{gk\,\mathrm{th}(kh)}\ .$$

Если это условие выполнено, то решение краевой задачи для функций $u_r(y)$ и $v_r(y)$ дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} u_r(y) &= a\frac{\omega\,\mathrm{ch}(k(y+h))}{\mathrm{sh}(kh)} = a\sqrt{\frac{2gk}{\mathrm{sh}(2kh)}}\,\mathrm{ch}(k(y+h)),\\ v_r(y) &= a\frac{i\omega\,\mathrm{sh}(k(y+h))}{\mathrm{sh}(kh)} = ia\sqrt{\frac{2gk}{\mathrm{sh}(2kh)}}\,\mathrm{sh}(k(y+h)). \end{aligned} \tag{23}$$

При этом выражение для функции $p_r(y)$ дается формулой (22).

Нам еще необходимо, имея в виду перспективы работы, получить длинноволновое приближение для частоты ω и скалярных функций $u_r(y)$, $v_r(y)$, $p_r(y)$. Сначала это будет сделано для зависимости частоты ω от волнового числа k, а затем для скалярных функций $u_r(y)$, $v_r(y)$ и $p_r(y)$. В соответствии с этим будут сформулированы и доказаны два утверждения. Мы будем пользоваться знаком ≡ в качестве символа эквивалентности соответствующего длинноволнового приближения.

Утверждение 4. *Длинноволновое приближение для частоты* ω *имеет вид следующей зависимости от волнового числа k*:

$$\omega = c_0k, \tag{24}$$

где

$$c_0 = \sqrt{gh}\ . \tag{25}$$

Доказательство. Поскольку в длинноволновом приближении $\mathrm{th}(kh) \equiv kh$, то отсюда и из основной формулы (20) следует

$$\omega = \sqrt{gk\,\mathrm{th}(kh)},\ \mathrm{th}(kh) \equiv kh,\ c_0 = \sqrt{gh} \to$$
$$\to \omega = \sqrt{gk\,\mathrm{th}(kh)} \equiv \sqrt{gkkh} = \sqrt{gh}\,k = c_0k \to \omega \equiv c_0k. \ \square$$

Замечание 2. Необходимо отметить, что величина c_0, которая определена формулой (25), является фазовой скоростью распространения длинных волн в однородной жидкости. Действительно, согласно определению и физическому смыслу понятия фазовой скорости в данном случае в силу формул (24) и (25), которые дают длинноволновое приближение для зависимости частоты ω от волнового числа k:

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0k}{k} = c_0,\ \ c_0 = \sqrt{gh}\ .$$

Формулу (25) получил в конце XVIII в. великий французский математик и физик Жозеф Луи Лагранж (1736—1814).

Переходим к формулировке и доказательству утверждения о длинноволновом приближении для основных гидродинамических характеристик u_r, v_r, p_r. Эти приближения величин обозначим соответственно символами u_{rlw}, v_{rlw}, p_{rlw}.

Утверждение 5. *Выражения для длинноволновых приближений основных гидродинамических характеристик u_r, v_r, p_r имеют следующий вид*:

$$u_{rlw} = \sqrt{\frac{g}{h}}\ a,\ v_{lwr} = i\sqrt{\frac{g}{h}}\ ak(y+h),\ p_{lwr} = g\rho a. \tag{26}$$

Доказательство. Отправным пунктом доказательства являются формулы (23) для компонент скорости частиц жидкости u_r , v_r, а также (22) для давления p_r.

Несложный расчет дает для этих характеристик следующие длинноволновые приближения:

$$u_r = a\sqrt{\frac{2gk}{\mathrm{sh}(2kh)}}\,\mathrm{ch}(k(y+h)) \equiv a\sqrt{\frac{2gk}{2kh}} \times 1 = \sqrt{\frac{g}{h}}\ a \to u_r \equiv \sqrt{\frac{g}{h}}\, a = u_{rlw},$$

$$v_r = ia\sqrt{\frac{2gk}{\mathrm{sh}(2kh)}}\,\mathrm{sh}(k(y+h)) \equiv ia\sqrt{\frac{2gk}{2kh}} \times k(y+h) = i\sqrt{\frac{g}{h}}\ ak(y+h) \to$$

$$\to v_r \equiv i\sqrt{\frac{g}{h}}\ ak(y+h) = v_{rlw},$$

$$p_r = g\rho a\ \frac{\mathrm{ch}(k(y+h))}{\mathrm{ch}(kh)} \equiv g\rho a\ \frac{1}{1} = g\rho a \to\ p_r \equiv g\rho a = p_{rlw}.$$

Расчет длинноволновых приближений основных характеристик волновых движений однородной жидкости подтвердил правильность формул (26). Истинность утверждения *доказана.*

Замечание 3. Следует отметить, что длинноволновые приближения горизонтальной компоненты скорости частиц жидкости u_r и динамической составляющей давления p являются ненулевыми постоянными величинами, а длинноволновое приближение вертикальной компоненты скорости v_r пропорционально глубине.

Приведем еще один нужный, имея в виду перспективы работы, факт.

Утверждение 6. *Осредненное значение горизонтальной скорости $u_r(y)$ по вертикали совпадает с длинноволновым приближением этой величины.*

Доказательство. Используя определение процедуры осреднения, получаем

$$ur(y) = a\frac{\omega\,\mathrm{ch}(k(y+h))}{\mathrm{sh}(kh)} \to$$

$$\to \langle u_r(y)\rangle = \frac{1}{h}\,a\int_{-h}^{0}\frac{\omega\,\mathrm{ch}(k(y+h))}{\mathrm{sh}(kh)}dy = \frac{1}{h}\,a\frac{\omega}{\mathrm{sh}(kh)}\ \frac{1}{k}\ \mathrm{sh}(k(y+h))\Big|_{-h}^{0} =$$

$$= \frac{1}{kh}\,a\frac{\omega}{\mathrm{sh}(kh)}\,(\mathrm{sh}(k(0+h)) - \mathrm{sh}(k(-h+h))) =$$

$$= \frac{1}{kh} a \frac{\omega}{\mathrm{sh}(kh)} \mathrm{sh}(kh) = \frac{1}{kh} a\omega = \frac{1}{kh} a \sqrt{gk\,\mathrm{th}(kh)} =$$

$$= a \sqrt{\frac{gk\,\mathrm{th}(kh)}{kh} \frac{1}{kh}} \equiv a \sqrt{\frac{g}{h}} \to \langle u_r(y) \rangle \equiv a \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Сопоставляя полученный результат с первой из формул (26), получаем следующее равенство: $\langle u_r(y) \rangle \equiv a \sqrt{\frac{g}{h}} = u_{rlw}$. □

Замечание 4. Следует отметить, что длинноволновые приближения горизонтальной компоненты скорости и динамической составляющей давления являются постоянными величинами, а длинноволновое приближение вертикальной компоненты скорости убывает по линейному закону.

Список литературы

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений идеальной жидкости. М., 1977.

Об авторах

Анатолий Алексеевич Зайцев — канд. физ.-мат. наук, Калининград.
E-mail: kulakov_petr@mail.ru

Петр Алексеевич Кулаков — главный специалист, ООО «Центр защиты информации», Калининград.
E-mail: kulakov_petr@mail.ru

About authors

Dr Anatoly Zaitsev — Kaliningrad.
E-mail: kulakov_petr@mail.ru

Petr Kulakov — chief specialist, Protection Information Center Ltd., Kaliningrad.
E-mail: kulakov_petr@mail.ru