УДК 514.75

Ю. И. Попов

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

РЕГУЛЯРНЫЕ ПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С H-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Рассматривается проективно-дифференциальная геометрия регулярной полосы $\Pi_{r(m)}$, которая является голономным случаем H-распределения [1]. Приведены дифференциальные уравнения подмногообразия $\Pi_{r(m)}$ и его двойственного образа. Доказана теорема существования регулярных полос $\Pi_{r(m)}$.

В статье используется следующая схема индексов:

$$\overline{I, K} = \overline{0, n}; \ I, K = \overline{1, n}; \ p, q, s, t = \overline{1, r}; \ i, j, k, l = \overline{r+1, m};$$

$$a, b, c, d = \overline{1, m}; \ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}; \ u, v = \overline{r+1, n-1}; \ \widehat{u}, \widehat{v} = \overline{r+1, n}.$$

1. Следуя работе [2], введем

Определение. *r-мерной полосой порядка m, или m-полосой ранга r, назовем r-параметрическое многообразие $V_{r(m)}$ плоских элементов (A, M_m) таких, что точка A описывает r-мерную поверхность V_r, а плоскость $M_m(A)$ описывает семейство касательных m-плоскостей поверхности V_r.*

Поверхность V_r называется базисной поверхностью полосы $V_{r(m)}$, а плоскости $M_m(A)$ — главными касательными плоскостями полосы $V_{r(m)}$.

Если характеристика $\Phi_{n-r-1}(A)$ [1] гиперполосы H_r, ассоциированной с полосой $V_{r(m)}$, имеет с r-мерной касательной плоскостью $\Lambda(A)$ базисной поверхности V_r лишь одну общую точку А, то полоса $V_{r(m)}$ называется *регулярной*. Условие $\Lambda \overset{\text{def}}{=} \| \Lambda^n_{pq} \| \neq 0$ является аналитическим условием регулярной полосы $V_{r(m)}$.

Геометрия регулярной полосы $V_{r(m)}$ получается из той части геометрии голономного $(\Lambda^{\hat{v}}_{[pq]} = 0)$ регулярного $(\Lambda \overset{\text{def}}{=} \| \Lambda^n_{pq} \| \neq 0)$ Н-распределения [1], которая определяется полями фундаментальных подобъектов $\{\Lambda^n_{pq}, \Lambda^n_{pqt}, \ldots\}$, $\{(\Lambda^n_{pq}, \Lambda^u_{pq}), \ldots\}$, $\{\Lambda^p_{uq}, \ldots\}, \ldots$, $\{\Lambda^n_{ab}, \Lambda^n_{abc}, \ldots\} \ldots$.

Полосу $V_{r(m)}$, ассоциированную с Н-распределением, будем обозначать кратко символом $\Pi_{r(m)}$.

Дифференциальные уравнения регулярной полосы $\Pi_{r(m)}$ в репере 1-го порядка $R^1[A_0 = A, \{A_a\} \subset M, \{A_p\} \subset \Lambda$, $\{A_\alpha\} \subset X_{n-m-1}(A_0)]$ имеют вид [1]:

$$\begin{gathered}\omega_0^{\hat{u}} = \omega_\alpha^n = \omega_i^n = 0,\ \ \omega_p^n = \Lambda^n_{pq}\omega_0^q,\ \ \omega_p^i = \Lambda^i_{pq}\omega_0^q,\\ \omega_p^\alpha = \Lambda^\alpha_{pq}\omega_0^q,\ \ \omega_i^p = \Lambda^p_{iq}\omega_0^q,\ \ \omega_i^\alpha = \Lambda^\alpha_{iq}\omega_0^q,\\ \omega_\alpha^p = \Lambda^p_{\alpha q}\omega_0^q,\ \ \omega_\alpha^i = \Lambda^i_{\alpha q}\omega_0^q,\end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered}\nabla\Lambda^n_{pq} + \Lambda^n_{pq}\omega_0^0 = \Lambda^n_{pqt}\omega_0^t,\ \ \nabla\Lambda^i_{pq} + \Lambda^i_{pq}\omega_0^0 + \Lambda^n_{pq}\omega_n^i = \Lambda^i_{pqt}\omega_0^t,\\ \nabla\Lambda^\alpha_{pq} + \Lambda^\alpha_{pq}\omega_0^0 + \Lambda^n_{pq}\omega_n^\alpha = \Lambda^\alpha_{pqt}\omega_0^t,\\ \nabla\Lambda^p_{iq} + \Lambda^p_{iq}\omega_0^0 - \delta^p_q\omega_i^0 = \Lambda^p_{iqt}\omega_0^t,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\nabla\Lambda^{\alpha}_{iq}+\Lambda^{\alpha}_{iq}\omega^{0}_{0}=\Lambda^{\alpha}_{iqt}\omega^{t}_{0},\ \nabla\Lambda^{p}_{\alpha q}+\Lambda^{p}_{\alpha q}\omega^{0}_{0}-\delta^{p}_{q}\omega^{0}_{\alpha}=\Lambda^{p}_{\alpha qt}\omega^{t}_{0},$$

$$\nabla\Lambda^{i}_{\alpha q}+\Lambda^{i}_{\alpha q}\omega^{0}_{0}=\Lambda^{i}_{\alpha q}\omega^{t}_{0},$$

$$\Lambda^{n}_{[pq]}=\Lambda^{i}_{[pq]}=\Lambda^{\alpha}_{[pq]}=0,\ \Lambda^{n}_{\alpha i}=\Lambda^{n}_{\alpha p}=\Lambda^{n}_{ip}=0,$$

$$\Lambda^{s}_{v[p}\Lambda^{n}_{q]s}=0.$$

Отметим, что $\Gamma_1=\left\{\Lambda^{n}_{pq},\Lambda^{i}_{pq},\Lambda^{\alpha}_{pq},\Lambda^{\alpha}_{iq}\right\}$ и $\Gamma_2=\left\{\Gamma_1,\Lambda^{p}_{iq},\Lambda^{p}_{\alpha q},\Lambda^{i}_{\alpha q}\right\}$ являются фундаментальными объектами соответственно 1-го и 2-го порядка полосы $\Pi_{r(m)}\subset P_n$.

Имеет место теорема существования полосы $\Pi_{r(m)}$.

Теорема 1. *Регулярные m-полосы* $\Pi_{r(m)}$ *ранга r проективного пространства* P_n *существуют и определяются с произволом (n-r)+r(n–r–1)+2(m–r)(n–m–1) функцией r аргументов.*

Доказательство. Чистое замыкание системы (1) представим в виде

$$\Delta\Lambda^{\hat{v}}_{pq}\wedge\omega^{q}_{0}=0,\ \Delta\Lambda^{p}_{vq}\wedge\omega^{q}_{0}=0,$$
$$\Delta\Lambda^{\alpha}_{iq}\wedge\omega^{q}_{0}=0,\ \Delta\Lambda^{i}_{\alpha q}\wedge\omega^{q}_{0}=0. \tag{3}$$

Находим характеры системы (3):

$$s_1=(n-r)r+A,\ \ s_2=(n-r)(r-1)+A,\dots,\ \ s_r=(n-r)1+A,$$

где $A=r(n-r-1)+2(m-r)(n-m-1)$.

Число Картана

$$Q=s_1+2s_2+3s_3+\dots+rs_r=(n-r)\frac{r(r+1)(r+2)}{6}+\frac{r(r+1)}{2}A.$$

В силу леммы Картана систему (3) запишем в виде:

$$\Delta\Lambda^{\hat{v}}_{pq}=\Lambda^{\hat{v}}_{pqt}\omega^{t}_{0},\ \ \Delta\Lambda^{p}_{vq}=\Lambda^{p}_{vqt}\omega^{t}_{0},$$
$$\Delta\Lambda^{\alpha}_{iq}=\Lambda^{\alpha}_{iqt}\omega^{t}_{0},\ \ \Delta\Lambda^{i}_{\alpha q}=\Lambda^{i}_{\alpha qt}\omega^{t}_{0}. \tag{4}$$

Определим число N — число линейно независимых функций, входящих в левую часть уравнения (4):

$$N = (n-r)\frac{r(r+1)(r+2)}{6} + \frac{r(r+1)}{2}A.$$

Таким образом, N = Q и система (2) находится в инволюции [3]. Решение системы (2) существует и определяется с произволом $(n-r)+r(n-r-1)+2(m-r)(n-m-1)$ функций r аргументов.

2. Вместо тензоров $\{\Lambda^{n}_{ij}\}, \{\Lambda^{n}_{\alpha\beta}\}$, тождественно равных нулю, для $\Pi_{r(m)}$, следуя работе [4], построим невырожденные тензоры 2-го порядка $V^{n}_{ij} = d^{nk}_{i} b_{kj}$ и $V^{n}_{\alpha\beta} = d^{n\gamma}_{\alpha} b_{\gamma\beta}$ и обращенные им тензоры $\{V^{ij}_{n}\}, \{V^{\alpha\beta}_{n}\}$, удовлетворяющие условиям:

$$V^{n}_{ik}V^{kj}_{n} = V^{n}_{ki}V^{jk}_{n} = \delta^{j}_{i}, \ \nabla V^{n}_{ij} + V^{n}_{ij}\omega^{0}_{0} = V^{n}_{ijp}\omega^{p}_{0},$$

$$\nabla V^{ij}_{n} - V^{ij}_{n}\omega^{0}_{0} = V^{ij}_{np}\omega^{p}_{0}, \ V^{n}_{\alpha\gamma}V^{\gamma\beta}_{n} = V^{n}_{\gamma\alpha}V^{\beta\gamma}_{n} = \delta^{\beta}_{\alpha},$$

$$\nabla V^{n}_{\alpha\beta} + V^{n}_{\alpha\beta}\omega^{0}_{0} = V^{n}_{\alpha\beta p}\omega^{p}_{0}, \ \nabla V^{\alpha\beta}_{n} - V^{\alpha\beta}_{n}\omega^{0}_{0} = V^{\alpha\beta}_{np}\omega^{p}_{0},$$

$$V \overset{def}{=} \det \| V^{n}_{ij} \| \neq 0, \ H \overset{def}{=} \det \| V^{n}_{\alpha\beta} \| \neq 0.$$

С полосой $\Pi_{r(m)}$ ассоциируются два проективных пространства $P_n(V_r)$ и $\overline{P}_n(V_r)$, двойственных между собой относительно инволютивного преобразования $J : \omega^{\bar{K}}_{\bar{I}} \to \overline{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{I}}$ структурных форм Пфаффа по закону [1]:

$$\overline{\omega}^{0}_{0} = \omega^{0}_{0} - S_{p}\omega^{p}_{0}, \ \overline{\omega}^{n}_{0} = 0, \ \overline{\omega}^{p}_{0} = \omega^{p}_{0}, \ \overline{\omega}^{i}_{0} = 0,$$

$$\overline{\omega}^{\alpha}_{0} = 0, \ \overline{\omega}^{0}_{n} = \omega^{0}_{n}, \ \overline{\omega}^{p}_{n} = -\Lambda^{pq}_{n}\omega^{0}_{q},$$

$$\overline{\omega}^{i}_{n} = -V^{ij}_{n}\omega^{0}_{j}, \ \overline{\omega}^{\beta}_{n} = -V^{\beta\alpha}_{n}\omega^{0}_{\alpha}, \ \overline{\omega}^{n}_{n} = \omega^{n}_{n} - S_{p}\omega^{p}_{o}, \ \overline{\omega}^{o}_{p} = \Lambda^{n}_{qp}\omega^{q}_{n},$$

$$\overline{\omega}^{i}_{p} = -\Lambda^{n}_{qp}V^{ij}_{n}\omega^{q}_{j}, \ \overline{\omega}^{\alpha}_{p} = -\Lambda^{n}_{qp}V^{\alpha\beta}_{n}\omega^{q}_{\beta}, \ \overline{\omega}^{o}_{i} = V^{n}_{ji}\omega^{j}_{n},$$

$$\overline{\omega}_i^p = -V_{ji}^n \Lambda_n^{pq} \omega_q^j, \quad \overline{\omega}_p^n = -\Lambda_{qp}^n \omega_o^q, \quad \overline{\omega}_i^n = 0, \quad \overline{\omega}_\alpha^n = 0, \tag{5}$$

$$\overline{\omega}_\alpha^0 = V_{\beta\alpha}^n \omega_n^\beta, \quad \overline{\omega}_\alpha^i = -V_n^{ij} V_{\beta\alpha}^n \omega_j^\beta, \quad \overline{\omega}_\alpha^p = -\Lambda_n^{pq} V_{\beta\alpha}^n \omega_q^\beta,$$

$$\overline{\omega}_i^\alpha = -V_{ji}^n V_n^{\alpha\beta} \omega_\beta^j, \quad \overline{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta S_p \omega_o^p + V_n^{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha p}^n \omega_o^p,$$

$$\overline{\omega}_p^s = \omega_p^s + \Lambda_n^{sq} \Lambda_{qpt}^n \omega_o^t - \delta_p^s S_t \omega_o^t, \quad \overline{\omega}_i^k = \omega_i^k + V_n^{kl} V_{lip}^n \omega_0^p - \delta_i^k S_p \omega_0^p,$$

где

$$S_p = \tfrac{1}{n+1}(\Lambda_p + V_p + H_p), \ \Lambda_p = \Lambda_n^{qt} \Lambda_{tqp}^n,$$

$$V_p = V_n^{ji} V_{ijp}^n, \ H_p = V_n^{\beta\alpha} V_{\alpha\beta p}^n.$$

При этом формы Пфаффа $\overline{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{K}}$ служат формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\tau_{\bar{I}}\}$ [1]:

$$d\tau_{\bar{I}} = \overline{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{K}} \tau_{\bar{K}}, \tag{6}$$

где

$$\tau_o = \rho[A_o, A_p, A_i, A_\alpha], \quad \tau_n = \rho[A_n, A_p, A_i, A_\alpha],$$

$$\tau_p = \rho \sum_q \Lambda_{qp}^n [A_o, A_1, ..., A_{q-1}, A_n, A_{q+1}, ..., A_r, A_i, A_\alpha],$$

$$\tau_\alpha = \rho \sum_\beta V_{\beta\alpha}^n [A_o, A_p, A_i, A_{m+1}, ..., A_{\beta-1}, A_n, A_{\beta+1}, ..., A_{n-1}].$$

$$\tau_i = \rho \sum_j V_{ji}^n [A_o, A_p, A_{r+1}, ..., A_{j-1}, A_n, A_{j+1}, ..., A_m, A_\alpha],$$

В силу этого регулярная полоса $\Pi_{r(m)}$ индуцирует двойственное себе многообразие $\overline{\Pi}_{r(m)} \subset \overline{P}_n$. Дифференциальные уравнения $\overline{\Pi}_{r(m)}$ в тангенциальном репере (4) имеют вид, аналогичный уравнениям (1) подмногообразия $\Pi_{r(m)}$ (без соответствующих замыканий).

$$\begin{gathered}\overline{\omega}_o^u = \overline{\omega}_\alpha^n = \overline{\omega}_i^n = 0, \ \overline{\omega}_p^n = \overline{\Lambda}_{pq}^n \overline{\omega}_o^q, \ \overline{\omega}_p^i = \overline{\Lambda}_{pq}^i \overline{\omega}_o^q, \ \overline{\omega}_p^\alpha = \overline{\Lambda}_{pq}^\alpha \overline{\omega}_o^q, \\ \overline{\omega}_i^p = \overline{\Lambda}_{iq}^p \overline{\omega}_o^q, \ \overline{\omega}_i^\alpha = \overline{\Lambda}_{iq}^\alpha \overline{\omega}_o^q, \ \overline{\omega}_\alpha^p = \overline{\Lambda}_{\alpha q}^p \overline{\omega}_o^q, \ \overline{\omega}_\alpha^i = \overline{\Lambda}_{\alpha q}^i \overline{\omega}_o^q.\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь поля фундаментальных объектов полосы $\Pi_{r(m)}$ и ее двойственного образа $\overline{\Pi}_{r(m)}$ связаны соотношениями:

$$\overline{\Lambda}^n_{pq} = -\Lambda^n_{pq}, \; \overline{\Lambda}^i_{pq} = -\Lambda^n_{ps} V^{ij}_n \Lambda^s_{iq}, \; \overline{\Lambda}^\alpha_{pq} = -\Lambda^n_{ps} V^{\alpha\beta}_n \Lambda^s_{\beta q},$$
$$\overline{\Lambda}^p_{iq} = -V^n_{ji} \Lambda^{ps}_n \Lambda^j_{sq}, \; \overline{\Lambda}^p_{\alpha q} = -V^n_{\beta\alpha} \Lambda^{ps}_n \Lambda^\beta_{sq}, \; \overline{\Lambda}^\alpha_{iq} = -V^n_{ji} V^{\alpha\beta}_n \Lambda^j_{\beta q},$$
$$\overline{\Lambda}^i_{\alpha q} = -V^n_{\beta\alpha} V^{ij}_n \Lambda^\beta_{jq}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Полоса* $\Pi_{r(m)} \subset P_n$ *в третьей дифференциальной окрестности ее образующего элемента индуцирует:*

а) проективное пространство $\overline{P}_n$*, двойственное исходному проективному пространству* P_n*, относительно инволютивного преобразования J форм* $\omega^{\overline{J}}_{K}$ *по закону (5);*

б) полосу $\overline{\Pi}_{r(m)} \subset \overline{P}_n$*, двойственную исходной полосе* $\Pi_{r(m)} \subset P_n$*, причем ее дифференциальные уравнения в тангенциальном репере (6) имеют вид (7), аналогичной уравнениям (1) полосы* $\Pi_{r(m)} \subset P_n$.

3. В разных дифференциальных окрестностях можно построить поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов полосы $\overline{\Pi}_{r(m)} \subset \overline{P}_n$, используя те же формулы охватов (соответствующие объекты пишутся с черточкой сверху).

Построенные поля геометрических объектов определяют внутреннюю геометрию полосы $\overline{\Pi}_{r(m)} \subset \overline{P}_n$, двойственную геометрии исходной полосы $\overline{\Pi}_{r(m)} \subset \overline{P}_n$.

Двойственная геометрия имеет место и на оснащенной полосе $\Pi_{r(m)} \subset P_n$. Действительно, всякая нормализация полосы $\Pi_{r(m)}$ полями квазитензоров $\{\nu^p_n, \nu^o_p\}$, $\{\nu^i_n, \nu^o_i\}$, $\{\nu^\alpha_n, \nu^o_\alpha\}$

индуцирует двойственную ей нормализацию $\{\overline{\nu}_n^p, \overline{\nu}_p^o\}$, $\{\overline{\nu}_n^i, \overline{\nu}_i^o\}$, $\{\overline{\nu}_n^\alpha, \overline{\nu}_\alpha^o\}$, при этом оснащающие объекты связаны соотношениями:

$$\overline{\nu}_n^p = -\Lambda_n^{pq}\overline{\nu}_q^o,\ \ \overline{\nu}_p^o = \Lambda_{qp}^n \nu_n^q,\ \ \nu_n^i = -V_n^{ik}\nu_k^o,\ \ \overline{\nu}_i^o = V_{ki}^n \nu_n^k,$$
$$\overline{\nu}_n^\alpha = -V_n^{\alpha\beta}\nu_\beta^o,\ \ \overline{\nu}_\alpha^o = V_{\beta\alpha}^n \nu_n^\beta. \qquad (8)$$

Отсюда непосредственно следует

Теорема 3. *Нормализация одной из полос* $\Pi_{r(m)} \subset P_n$ *или* $\overline{\Pi}_{r(m)} \subset \overline{P}_n$ *равносильна нормализации другой, при этом компоненты полей оснащающих объектов связаны соотношениями (8).*

Список литературы

1. *Попов Ю. И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: Монография. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.

2. *Вагнер В. В.* Теория поля локальных гиперполос //Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1950. Вып. 8. С. 197—272.

3. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.; Л., 1948.

4. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. 2-е изд. Чебоксары, 1994.

Yu. Popov

THE REGULAR STRIPS IN PROJECTIVE SPACE ASSOCIATED WITH A H-DISTRIBUTION

The projective differential geometry of a strip $\Pi_{r(m)}$, which is holonomic case of H-distribution, is considered. The differential equations of submanifold $\Pi_{r(m)}$ and its dual image are given. The existence theorem is proved.