УДК 514.764.3

А. В. Христофорова

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия

Двойственные пространства аффинной связности, определяемые распределением гиперплоскостных элементов

Найдено условие существования пространства аффинной связности $\overline{A}_{n,n}$, двойственного исходному пространству аффинной связности $A_{n,n}$ при задании в нем распределения гиперплоскостных элементов.

Ключевые слова: распределение гиперплоскостных элементов, пространство аффинной связности, связность, двойственность.

Индексы принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, T, S = \overline{1, n};\ \bar{I}, \bar{J} = \overline{0, n};\ i, j, l, k, t, s = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, заданное системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$, подчиненных структурным уравнениям [1],

$$D\theta^I = \theta^K \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{ST} \theta^S \wedge \theta^T,\ D\theta^I_J = \theta^K_J \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{JST} \theta^S \wedge \theta^T,$$

$$r^I_{(ST)} = 0,\ \ r^I_{L(ST)} = 0,\ \ \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n \neq 0;$$

r^I_{ST} и r^I_{LST} — тензоры кручения и кривизны пространства $A_{n,n}$.

Согласно [4], пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое системой форм Пфаффа $\omega^{\bar{I}}_{\bar{J}}$

$$\omega_0^I = \theta^I,\ \omega_0^0 = -\frac{1}{n+1}\theta_K^K,\ \omega_I^0 = 0,\ \omega_L^I = \theta_L^I - \frac{1}{n+1}\delta_L^I\theta_K^K, \quad (1)$$

представляет собой расширенное пространство аффинной связности $P_{n,n} \equiv \overset{*}{A}_{n,n}$.

Будем говорить, что в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$ задано распределение M 1-го рода [2] гиперплоскостных элементов $(A\ ,\Pi_{n-1})$, $A \in \Pi_{n-1}$, если это подмногообразие задано в расширенном пространстве аффинной связности $\overset{*}{A}_{n,n}$, то есть распределение 1-го рода M гиперплоскостных элементов представляет собой n-параметрическое многообразие линейных элементов $(A\ ,\Pi_{n-1})$, где точка $A \in \Pi_{n-1}$ принадлежит базе B_n пространства $A_{n,n}$, Π_{n-1} — гиперплоскость, соответствующая точке A и лежащая в слое $A_n(A)$ пространства $A_{n,n}$.

В пространстве $\overset{*}{A}_{n,n}$ в репере нулевого порядка ($A_0 \equiv A,\ A_i \in \Pi_{n-1}$) система дифференциальных уравнений распределения гиперплоскостных элементов имеет вид

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K .$$

Продолжение этих уравнений приводит к получению дифференциальных уравнений компонент полей фундаментальных объектов 1-го $\{\Lambda_{iK}^n\}$, 2-го $(\Lambda_{iK}^n, \Lambda_{iKL}^n)$ порядков и т. д.

В работе [5] было доказано, что регулярное распределение гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцирует во 2-й дифференциальной окрестности пространство проективной связности $\overline{P}_{n,n}$, двойственное $\overset{*}{A}_{n,n}$ относительно инволютивного преобразования форм связности по закону

$$\overline{\omega}_0^i = \omega_0^i + \Lambda_{kn}^n \Lambda_n^{ik} \omega_0^n, \ \ \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \frac{1}{n+1} \Lambda_K \omega_0^K,$$

$$\overline{\omega}_n^n = \omega_n^n - \frac{1}{n+1} \Lambda_K \omega_0^K, \overline{\omega}_i^n = -\Lambda_{ki}^n \omega_0^k, \ \overline{\omega}_i^0 = \Lambda_{ki}^n \omega_n^k, \tag{2}$$

$$\overline{\omega}_n^i = -\Lambda_n^{ik} \omega_k^0 = 0, \overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0 = 0, \overline{\omega}_0^n = \omega_0^n,$$

$$\overline{\omega}_i^k = \omega_i^k + (\Lambda_n^{kj} \Lambda_{jiL}^n - \delta_i^k \frac{\Lambda_L}{n+1}) \omega_0^L,$$

причем пространства $\overset{*}{A}_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$ могут быть проективными лишь одновременно.

Определение 1. *Если пространство проективной связности $\overline{P}_{n,n}$, индуцируемое регулярным распределением гиперплоскостных элементов М в $A_{n,n}$ ассоциировано с некоторым пространством аффинной связности $\overline{A}_{n,n}$ по схеме (1), то пространства аффинной связности $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$ назовем двойственными.*

Предположим, что формы $\{\overline{\theta}^I, \overline{\theta}_J^I\}$ являются формами связности пространства $\overline{A}_{n,n}$, двойственного пространству $A_{n,n}$; следовательно, формы связности пространства $\overline{P}_{n,n}$ должны удовлетворять соотношениям, аналогичным (1)

$$\overline{\omega}_0^I = \overline{\theta}^I, \overline{\omega}_0^0 = -\frac{1}{n+1} \overline{\theta}_K^K, \tag{3}$$

$$\overline{\omega}_I^0 = 0, \overline{\omega}_L^I = \overline{\theta}_L^I - \frac{1}{n+1} \delta_L^I \overline{\theta}_K^K.$$

Заменяя в (3) формы $\overline{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ по формулам (2) и (1), получаем, что формы связности двойственных пространств $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$ связаны соотношениями

$$\overline{\theta}^n=\theta^n,\ \overline{\theta}_n^i=0,$$
$$\overline{\theta}_i^n=-\Lambda_{ki}^n\theta^k,\ \overline{\theta}^i=\theta^i+\Lambda_{jn}^n\Lambda_n^{ij}\theta^n, \tag{4}$$
$$\overline{\theta}_j^i=\theta_j^i+\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kjL}^n\theta^L,\ \overline{\theta}_n^n=\theta_n^n.$$

Из соотношений (2), (3_3) непосредственно следует

$$\omega_n^i=0,$$

что согласно выражениям (1) равносильно соотношениям

$$\theta_n^i=0. \tag{5}$$

Итак, если пространства аффинной связности $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$ двойственны, то на слоевые формы исходного пространства $A_{n,n}$ накладываются соотношения (5).

Можно показать, что справедливо и обратное: если слоевые формы пространства аффинной связности $A_{n,n}$ подчинены закону (5), то пространства $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$ двойственны (в смысле определения 1). Действительно, в силу (5), а также соотношений [5]

$$\overline{\Lambda}_{ij}^n=-\Lambda_{ji}^n,\quad \overline{\Lambda}_{in}^n=\Lambda_{si}^n\Lambda_{kn}^n\Lambda_n^{sk},\ \overline{\Lambda}_n^{ij}=-\Lambda_n^{ij},$$
$$\overline{\Lambda}_{ijs}^n=\Lambda_{ki}^n\Lambda_n^{kl}\Lambda_{ljs}^n,\quad \overline{\Lambda}_{ijn}^n=\Lambda_{ki}^n\Lambda_n^{kl}(\Lambda_{ljn}^n-\Lambda_{ljt}^n\Lambda_n^{ts}\Lambda_{sn}^n)$$

преобразование структурных форм по закону (4) является инволютивным, так как

$$\theta^n=\overline{\theta}^n,\ \theta_n^i=0,$$
$$\theta_i^n=-\overline{\Lambda}_{ki}^n\overline{\theta}^k,\ \ \theta^i=\overline{\theta}^i+\overline{\Lambda}_{jn}^n\overline{\Lambda}_n^{ij}\overline{\theta}^n,$$
$$\theta_j^i=\overline{\theta}_j^i+\overline{\Lambda}_n^{ik}\overline{\Lambda}_{kjL}^n\overline{\theta}^L,\quad \theta_n^n=\overline{\theta}_n^n.$$

Теорема 1. *Для того чтобы при задании регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцировалось пространство аффинной связности $\overline{A}_{n,n}$, двойствен-*

ное исходному, необходимо и достаточно, чтобы слоевые формы θ_n^i пространства $A_{n,n}$ обращались в нуль.

Тензоры кривизны и кручения двойственных пространств аффинной связности $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$ связаны соотношениями

$$\bar{r}^i_{st} = \Lambda^{ik}_n r^n_{kst}, \quad \bar{r}^i_{sn} = \Lambda^{il}_n (r^n_{lsn} - \Lambda^n_{kn}\Lambda^{jk}_n r^n_{lsj}),$$
$$\bar{r}^n_{st} = r^n_{st}, \quad \bar{r}^n_{sn} = r^n_{sn} - r^n_{sl}\Lambda^n_{kn}\Lambda^{lk}_n,$$
$$\bar{r}^i_{nst} = r^i_{nst} = 0, \quad \bar{r}^n_{ist} = \Lambda^n_{ji} r^j_{st},$$
$$\bar{r}^i_{nsn} = \Lambda^{il}_n (r^n_{lsn} - \Lambda^n_{kn}\Lambda^{jk}_n r^n_{lsj}), \quad \bar{r}^n_{nst} = r^n_{nst},$$
$$\bar{r}^n_{nsn} = r^n_{nsn} - \Lambda^n_{kn}\Lambda^{lk}_n r^n_{nsl}, \quad \bar{r}^i_{jst} = \delta^i_j r^n_{nst} - \Lambda^{il}_n \Lambda^n_{kj} r^k_{lst},$$
$$\bar{r}^i_{jsn} = \delta^i_j (r^n_{nsn} - \Lambda^n_{kn}\Lambda^{lk}_n r^n_{nsl}) + \Lambda^{il}_n \Lambda^n_{kj} (\Lambda^n_{pn}\Lambda^{pq}_n r^k_{lsq} - r^k_{lsn}).$$

Замечание. Из последних соотношений имеем

$$\left\{ A_{n,n} \equiv A_n \right\} \Leftrightarrow \left\{ \overline{A}_{n,n} \equiv \overline{A}_n \right\}.$$

Найдем геометрическое истолкование условия (5). Известно, что условие параллельного перенесения направления A_0K, $K = u^L A_L$ вдоль некоторой кривой *l* в связности пространства $A_{n,n}$ имеет вид

$$du^J + u^L \theta^J_L = \Omega u^J \,(\mathrm{mod}\, l),$$

откуда применительно к направлению A_0A_n (то есть $u^n = 1,\ u^i = 0$) получим (5).

Отсюда непосредственно следует, что равенства (5) являются достаточным условием параллельного перенесения направления A_0A_n в связности пространства $A_{n,n}$ вдоль любой кривой *l* пространства $A_{n,n}$.

Теорема 2. *Для того чтобы при задании регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцировалось пространство аффинной связности $\overline{A}_{n,n}$, двойствен-*

ное исходному, достаточно, чтобы направление A_0A_n *в связности пространства* $A_{n,n}$ *переносилось параллельно вдоль любой кривой пространства* $A_{n,n}$.

Замечание. В случае аффинного пространства $A_{n,n} \equiv A_n$ справедливо и обратное утверждение. Дифференциал точки A_n с учетом (5) запишется в виде $dA_n = \omega_n^n A_n$, то есть нормальная [3] («несобственная») точка A_n направления A_0A_n неподвижна, а, следовательно, направление A_0A_n переносится параллельно в смысле геометрии пространства A_n.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

2. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Труды геом. Семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. 1971. Т. 3. С. 49—94.

3. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

4. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник ЧГПУ. 2005. №4. С. 21—27.

5. *Христофорова А. В.* Двойственная геометрия регулярной гиперповерхности в пространстве аффинной связности. Чебоксары, 2011.

A. Khristoforova

Dual spaces of affine connection determined by the distribution of hyperplane elements

The existence condition for dual space of affine connection $\overline{A}_{n,n}$ was found if the distribution of hyperplane elements is set in the original space of affine connection $A_{n,n}$.