metrical interpretation of holonomic of the distribution are considered. By means of focal images, associated with the distributions Δ and Δ^* , normal of 2-nd kind field of hyperstrip SH_m is found, which is called field of Grin′s ribs.

УДК 514.75

ДВОЙСТВЕННЫЙ ОБРАЗ ЦЕНТРИРОВАННОЙ ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ CH_m^r

Т.Ю. М а к с а к о в а

(Балтийский военно-морской институт)

Продолжается изучение внутренней геометрии центрированной тангенциально вырожденной гиперполосы CH_m^r. Показано, что в дифференциальной окрестности 2-го порядка гиперполоса CH_m^r [1]-[3] индуцирует проективное пространство $\overline{P}_n(V_r)$, двойственное исходному $P_n(V_r)$ относительно инволютивного преобразования J, порождаемого гиперполосой CH_m^r. Введен в рассмотрение двойственный образ оснащенной гиперполосы CH_m^r относительно преобразования J.

В работе придерживаемся обозначений и терминологии работ [1]-[3] . Индексы пробегают следующие значения:

$$I,J,K=\overline{0,n};\ p,q,r=\overline{1,r};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\ i,j,k=\overline{r+1,m}.$$

Для гиперполосы CH_m^r в дифференциальной окрестности 2-го порядка введем в рассмотрение аналогично работе [4] симметричные невырожденные тензоры

$$e_{ij}^n \overset{\text{def}}{=} d_i^{nk} e_{kj},\ e_{\alpha\beta}^n \overset{\text{def}}{=} d_\alpha^{n\gamma} e_{\gamma\beta}, \tag{1}$$

для которых, следовательно, можно ввести обратные тензоры 2-го порядка $e_n^{ij}, e_n^{\alpha\beta}$:

$$e_n^{jk} e_{ki}^n = \delta_i^j,\ e_n^{\beta\gamma} e_{\gamma\alpha}^n = \delta_\alpha^\beta\ , \tag{2}$$

$$\begin{cases} \nabla e_{ij}^n + e_{ij}^n \omega_0^0 = e_{ijp}^n \omega^p, \quad \nabla e_{\alpha\beta}^n + e_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = e_{\alpha\beta p}^n \omega^p, \\ \nabla e_n^{ij} - e_n^{ij} \omega_0^0 = e_{np}^{ij} \omega^p = -e_n^{ik} e_n^{lj} e_{klp}^n \omega_o^p, \\ \nabla e_n^{\alpha\beta} - e_n^{\alpha\beta} \omega_0^0 = e_{np}^{\alpha\beta} \omega^p = -e_n^{\alpha\gamma} e_n^{\eta\beta} e_{\gamma\eta p}^n \omega_o^p; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \nabla e_{ijp}^n + 2e_{ijp}^n \omega_0^0 + e_{ij}^n (\omega_p^0 - a_{qp}^n \omega_n^q) \equiv 0, \\ \nabla e_{\alpha\beta p}^n + 2e_{\alpha\beta p}^n \omega_0^0 + e_{\alpha\beta}^n (\omega_p^0 - a_{qp}^n \omega_n^q) \equiv 0. \end{cases} \tag{4}$$

Определители $A=|a^n_{pq}|, L=|e^n_{ij}|, H=|e^n_{\alpha\beta}|$ основного фундаментального тензора 1-го порядка a^n_{pq} гиперполосы CH^r_m [4]-[5] и тензоров (1) являются относительными инвариантами:

$$\begin{cases} d\ln A = 2\omega^p_p - r(\omega^0_0+\omega^n_n)+A_p\omega^p, \\ d\ln L = 2\omega^i_i - s(\omega^0_0+\omega^n_n)+L_p\omega^p, \\ d\ln H = 2\omega^\alpha_\alpha - (n-m-1)(\omega^0_0+\omega^n_n)+H_p\omega^p, \end{cases} \tag{5}$$

где $A_p = a^{qs}_n a^n_{sqp}, L_p = e^{ij}_n e^n_{jip}, H_p = e^{\alpha\beta}_n e^n_{\beta\alpha p}$;

$$\begin{cases} \nabla a^n_{pq} + a^n_{pq}\omega^0_0 = a^n_{pqs}\omega^s, \\ \nabla a^n_{pqs} + 2a^n_{pqs}\omega^0_0 + a^n_{pq}\omega^0_s - a^n_{(pq}a^n_{s)t}\omega^t_n \equiv 0, \\ \nabla a^{pq}_n - a^{pq}_n\omega^0_0 = -a^{pf}_n a^{qs}_n a^n_{fst}\omega^t. \end{cases} \tag{6}$$

Согласно уравнениям (5) относительный инвариант Ф=A•L•H удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\ln\Phi + (n+1)(\omega^0_0+\omega^n_n) = \Phi_p\omega^p,$$

где

$$\begin{cases} \Phi_p = A_p + L_p + H_p, \\ \nabla\Phi_p + \Phi_p\omega^0_0 + (n+1)(\omega^0_p - a^n_{qp}\omega^q_n) = \Phi_{pq}\omega^p, \Phi_{[pq]} \equiv 0. \end{cases} \tag{7}$$

Введем в рассмотрение систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\overline{\omega}^K_J$ вида:

$$\overline{\omega}^n_0 = \omega^n_0 = 0, \overline{\omega}^i_0 = \omega^i_0 = 0, \overline{\omega}^\alpha_0 = \omega^\alpha_0 = 0, \overline{\omega}^n_\alpha = \omega^n_\alpha = 0, \overline{\omega}^n_i = \omega^n_i = 0, \tag{a}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}^p_0 = \omega^p_0, \overline{\omega}^p_n = -a^{pq}_n\omega^0_q, \overline{\omega}^j_n = -e^{ji}_n\omega^0_i, \overline{\omega}^\beta_n = -e^{\beta\alpha}_n\omega^0_\alpha, \overline{\omega}^0_p = a^n_{pq}\omega^q_n, \\
&\overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \frac{1}{n+1}\Phi_p\omega^p, \overline{\omega}^0_i = e^n_{ij}\omega^j_n, \overline{\omega}^n_n = \omega^n_n - \frac{1}{n+1}\Phi_p\omega^p, \\
&\overline{\omega}^i_p = -a^n_{pq}e^{ij}_n\omega^q_j, \overline{\omega}^\alpha_p = -a^n_{pq}e^{\alpha\beta}_n\omega^q_\beta, \overline{\omega}^n_p = -a^n_{qp}\omega^q_0, \overline{\omega}^p_i = -e^n_{ij}a^{pq}_n\omega^j_q, \\
&\overline{\omega}^b_p = \omega^b_p + a^{bq}_n a^n_{qpt}\omega^t - \frac{1}{n+1}\delta^b_p\Phi_t\omega^t, \overline{\omega}^0_n = \omega^0_n, \\
&\overline{\omega}^j_i = \omega^j_i + e^{jk}_n e^n_{kip}\omega^p_0 - \frac{1}{n+1}\delta^j_i\Phi_p\omega^p, \overline{\omega}^0_i = e^n_{ij}\omega^j_n, \overline{\omega}^\alpha_i = -e^n_{ji}e^{\alpha\beta}_n\omega^j_\beta, \\
&\overline{\omega}^0_\alpha = e^n_{\beta\alpha}\omega^\beta_n, \overline{\omega}^i_\alpha = -e^{ij}_n e^n_{\beta\alpha}\omega^\beta_j, \overline{\omega}^p_\alpha = -a^{pq}_n e^n_{\beta\alpha}\omega^\beta_q, \\
&\overline{\omega}^\beta_\alpha = \omega^\beta_\alpha + e^{\beta\gamma}_n e^n_{\gamma\alpha p}\omega^p - \frac{1}{n+1}\delta^\beta_\alpha\Phi_p\omega^p.
\end{aligned} \tag{8}$$

В силу соотношений (1.3), (1.4), (1.7), (1.9), (1.11)-(1.13) работы [2] и соотношений (2)-(7) система форм $\overline{\omega}^K_J$ (8) удовлетворяет структурным уравнениям проективного пространства $\overline{P}_n$

$$D\overline{\omega}^{\overline{K}}_{\overline{I}} = \overline{\omega}^{\overline{L}}_{\overline{I}} \wedge \overline{\omega}^{\overline{K}}_{\overline{L}}, \ \overline{\omega}^{\overline{L}}_{\overline{L}} = 0. \tag{9}$$

Так как $\overline{\omega}_0^n = \omega_0^n = 0, \overline{\omega}_0^\alpha = \omega_0^\alpha = 0, \overline{\omega}_0^i = \omega_0^i = 0$, то проективные пространства P_n и $\overline{P}_n$ можно рассматривать как плоские (т.е. с нулевым тензором кривизны-кручения) пространства проективной связности $P_{r,n}$ и $\overline{P}_{r,n}$ с общей r-мерной базой V_r и n-мерными центропроективными слоями [3]. Поэтому, мы будем их обозначать соответственно $P_n(V_r)$ и $\overline{P}_n(V_r)$. Докажем, что преобразование J структурных форм $\omega_J^K \to \overline{\omega}_J^K$ по закону (8) является инволютивным, т.е. $J=J^{-1}$ [4].

В силу соотношений (8) и формул (1.11) [2] имеем :

$$\begin{cases} \overline{\omega}_p^n = \overline{a}_{pq}^n \overline{\omega}^q, \overline{\omega}_p^i = \overline{b}_{pq}^i \overline{\omega}^q, \overline{\omega}_p^\alpha = \overline{b}_{pq}^\alpha \overline{\omega}^q, \\ \overline{\omega}_i^p = \overline{b}_{iq}^p \overline{\omega}^q, \overline{\omega}_\alpha^p = \overline{b}_{\alpha q}^p \overline{\omega}^q, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\begin{cases} \overline{a}_{pq}^n = -a_{pq}^n, \overline{b}_{pq}^i = -a_{pt}^n b_{jq}^t l_n^{ij}, \overline{b}_{iq}^p = -a_n^{pt} b_{tq}^j l_{ji}^n, \\ \overline{b}_{pq}^\alpha = -a_{pt}^n b_{\beta q}^t l_n^{\alpha\beta}, \overline{b}_{\alpha q}^p = -a_n^{pt} b_{tq}^\beta l_{\beta\alpha}^n. \end{cases} \tag{11}$$

При преобразовании J в дифференциальной окрестности 2-го порядка с помощью (11) последовательно находим :

$$\begin{cases} \overline{B}_n^\alpha \overset{def}{=} \frac{1}{r} \overline{b}_{pq}^\alpha \overline{a}_n^{pq} = l_n^{\alpha\beta} B_\beta^0, \overline{B}_\alpha^0 \overset{def}{=} \frac{1}{r} \overline{B}_{\alpha p}^p = -l_{\beta\alpha}^n B_n^\beta, \\ \overline{B}_n^i \overset{def}{=} \frac{1}{r} \overline{b}_{pq}^i \overline{a}_n^{pq} = l_n^{ij} B_j^0, \overline{B}_i^0 = -l_{ij}^n B_n^j \overset{def}{=} \frac{1}{r} \overline{b}_{ip}^p, \\ \overline{C}_{pq}^\alpha \overset{def}{=} \overline{b}_{pq}^\alpha - \overline{B}_n^\alpha \overline{a}_{pq}^n = -l_n^{\alpha\beta} a_{tp}^n L_{\beta q}^t, \overline{C}_{pq}^i \overset{def}{=} \overline{b}_{pq}^i - \overline{B}_n^i \overline{a}_{pq}^n = -l_n^{ij} a_{pt}^n L_{jq}^t, \\ \overline{L}_{\alpha q}^p \overset{def}{=} \overline{b}_{\alpha q}^p - \overline{B}_\alpha^0 \delta_q^p = -l_{\gamma\alpha}^n l_{qn}^{\gamma p}, \overline{l}_{qn}^{\gamma p} = \overline{C}_{sq}^\gamma \overline{a}_n^{ps} = l_n^{\gamma\beta} L_{\beta q}^p, \\ \overline{L}_{iq}^p \overset{def}{=} \overline{b}_{iq}^p - \overline{B}_i^0 \delta_q^p = -l_{ji}^n l_{qn}^{jp}, \overline{l}_{qn}^{ip} \overset{def}{=} \overline{C}_{qs}^i \overline{a}_n^{sp} = l_n^{ij} L_{jq}^p, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \overline{l}_{ij} \overset{def}{=} \overline{L}_{it}^p \overline{L}_{jp}^t = l_{ik}^n l_{nn}^{kl} l_{lj}^n, \overline{l}_{\alpha\beta} \overset{def}{=} \overline{L}_{\alpha t}^p L_{\beta p}^t = l_{\alpha\gamma}^n l_{nn}^{\gamma\eta} l_{\eta\beta}^n, \\ \overline{l}_{nn}^{ij} \overset{def}{=} \overline{l}_{qn}^{ip} \overline{l}_{pn}^{jq} = l_n^{ik} l_{kl} l_n^{lj}, \overline{l}_{nn}^{\alpha\beta} \overset{def}{=} \overline{l}_{qn}^{\alpha p} l_{pn}^{\beta q} = l_n^{\alpha\gamma} l_{\gamma\eta} l_n^{\eta\beta}. \end{cases} \tag{13}$$

В матричной форме соотношения (1), (13) запишутся в виде:

$$\begin{cases} L_1 = d_1^{-1} l_1, \overline{l}_1 = L_1 C_1 L_1', \overline{C}_1 = (L_1^{-1}) l_1 (L_1^{-1})', \\ L_2 = d_2^{-1} l_2, \overline{l}_2 = L_2 C_2 L_2', \overline{C}_2 = (L_2^{-1}) l_2 (L_2^{-1})', \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\begin{cases} L_1 = (l_{ij}^n), \quad \overline{l}_1 = (\overline{l}_{ij}), \quad l_1 = (l_{ij}), \quad d_1 = (d_{nj}^i), \quad c_1 = (c_{nn}^{ij}), \\ L_2 = (l_{\alpha\beta}^n), \quad \overline{l}_2 = (\overline{l}_{\alpha\beta}), \quad l_2 = (l_{\alpha\beta}), \quad d_2 = (d_{n\beta}^\alpha), \quad c_2 = (c_{nn}^{\alpha\beta}), \end{cases} \tag{15}$$

$$l_1c_1=c_1l_1,\ l_2c_2=c_2l_2,\ c_1^{-1}d_1 = d_1^{-1}c_1,\ \ c_2^{-1}d_2 = d_2^{-1}c_2. \tag{16}$$

Непосредственной проверкой с использованием соотношений (13)-(16) убеждаемся, что матричным уравнениям

$$\bar{l}_1^{-1}\tilde{o} = \tilde{o}^{-1}\tilde{n}_1,\quad \bar{l}_2^{-1}\tilde{o} = \tilde{o}^{-1}\tilde{n}_2 \tag{17}$$

удовлетворяют соответственно охваты

$$\bar{d}_1 = -L_1 d_1 L_1^{-1},\quad \bar{d}_2 = -L_2 d_2 L_2^{-1}. \tag{18}$$

Обозначая $\bar{L}_1 = \bar{d}_1^{-1}\bar{l}_1$, $\bar{L}_2 = \bar{d}_2^{-1}\bar{l}_2$ и учитывая (16), (14), (18), находим $\bar{L}_1 = -L_1'$, $\bar{L}_2 = -L_2'$, т.е.

$$\bar{l}_{ij}^{n} = -l_{ji}^{n},\ \ \bar{l}_{\alpha\beta}^{n} = -l_{\beta\alpha}^{n}. \tag{19}$$

Из дифференциальных уравнений (3),(6) с использованием соотношений (8), (11), (12), (19) получаем следующие зависимости:

$$\bar{l}_{ijp}^{n} = l_{ki}^{n} l_{n}^{kl} l_{ljp},\ \ \bar{l}_{\alpha\beta p}^{n} = l_{\gamma\alpha}^{n} l_{n}^{\gamma\eta} l_{\eta\beta p}^{n},\ \ \bar{a}_{pqt}^{n} = a_{pqt}^{n}. \tag{20}$$

Наконец, в силу соотношений (5),(7),(11),(19),(20), имеем

$$\bar{\tilde{A}}_{ð} = -\grave{A}_{ð},\ \bar{L}_p = -L_p,\ \bar{H}_p = -H_p,\ \bar{\hat{O}}_{ð} = -\hat{O}_{ð}. \tag{21}$$

Теперь согласно соотношениям (11), (12), (19), (21) нетрудно проверить, что преобразование J структурных форм ω_J^K по закону (8) является инволютивным, т.е. $J=J^{-1}$. Имея в виду эту инволютивность, мы говорим, что проективные пространства $P_n(V_r)$ и $\bar{P}_n(V_r)$ являются двойственными [4], причем формы ω_J^K являются формами инфинитезимального перемещения точечного репера 1-го порядка $\{A_J\}$, а формы ω_J^K - формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\tau_J\}$, где

$$\begin{cases} \tau_0 = \rho[\grave{A}_0, \grave{A}_1, \ldots, A_{n-1}],\ \tau_\rho = \sum\limits_q a_{qp}^n[\grave{A}_0, \grave{A}_1, \ldots, A_{q-1}, A_n, A_{q+1}, \ldots, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_{n-1}], \\ \tau_i = \rho\sum\limits_j e_{ji}^n[\grave{A}_0, \grave{A}_1, \ldots, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_{j-1}, A_n, A_{j+1}, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_{n-1}], \\ \tau_\alpha = \rho\sum\limits_\beta l_{\beta\alpha}^n[\grave{A}_0, \grave{A}_1, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots,, A_{\beta-1}, A_n, A_{\beta+1}, \ldots, A_{n-1}], \\ \tau_n = \rho[A_n, A_1, \ldots, A_{n-1}],\ \rho = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{O}}}. \end{cases} \tag{22}$$

Теорема 1. Центрированная тангенциально вырожденная гиперполоса CH_m^r во второй дифференциальной окрестности ее образующего элемента индуцирует:

1) проективное пространство $\bar{P}_n(V_r)$, двойственное исходному $\bar{P}_n(V_r)$ относительно инволютивного преобразования J форм $\omega_J^{\bar{K}}$ по закону (8);

2) двойственную исходной гиперполосе CH_m^r центрированную тангенциально вырожденную гиперполосу $\overline{CH_m^r}$, которая задается относительно тангенциального репера (22) уравнениями (8а),(10).

В разных дифференциальных окрестностях аналогично работам [1]-[3] можно построить поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов двойственного многообразия $\overline{CH^r_m} \subset \overline{P}_n(V_r)$, используя те же формулы охватов, что и для гиперполосы $CH^r_m \subset P_n(V_r)$. Построенные поля геометрических объектов определяют внутреннюю геометрию гиперполосы $\overline{CH^r_m} \subset \overline{P}_n(V_r)$, двойственную геометрии исходной гиперполосы $CH^r_m \subset P_n(V_r)$.

Двойственная теория имеет место и на оснащенной гиперполосе CH^r_m. Действительно, пусть гиперполоса $CH^r_m \subset P_n(V_r)$ нормализована полями квазитензоров $\upsilon^p_n, \upsilon^0_p$ с уравнениями

$$\nabla\upsilon^p_n + \omega^p_n = \upsilon^{\partial}_{nq}\omega^q, \quad \nabla\upsilon^0_p + \omega^0_p = \upsilon^0_{pq}\omega^q, \tag{23}$$

т.е. задана обобщенная нормализация гиперполосы CH^r_m [1],[2]. В силу соотношений (8) убеждаемся, что функции

$$\overline{\upsilon}^p_n = -a^{pq}_n\upsilon^0_q, \quad \overline{\upsilon}^0_p = a^n_{pq}\upsilon^q_n \tag{24}$$

удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\nabla\overline{\upsilon}^p_n + \overline{\omega}^p_n = \overline{\upsilon}^p_{nq}\omega^q_0; \quad \nabla\overline{\upsilon}^0_p + \overline{\omega}^0_p = \overline{\upsilon}^0_{pq}\omega^q. \tag{25}$$

Из уравнений (23), (25) непосредственно следует

Теорема 2. Нормализация одной из гиперполос $CH^r_m \subset P_n(V_r)$ и $\overline{CH^r_m} \subset \overline{P}_n(V_r)$ равносильна нормализации другой, при этом компоненты полей оснащающих объектов $\{\upsilon^p_n, \upsilon^0_p\}$ и $\{\overline{\upsilon}^p_n, \overline{\upsilon}^0_p\}$ связаны соотношением (24).

Библиографический список

1. *Попов Ю.И., Попова Т.Ю.* Центрированные тангенциально-вырожденные гиперполосы CH^r_m ранга r проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1996. Вып.27. С.77-90.

2. *Попова Т.Ю.* Центрированные тангенциально-вырожденные гиперполосы CH^r_m ранга r в проективном пространстве P_n / Калинингр. ВВМУ. Калининград, 1997. 45 с. Деп. в ВИНИТИ, №197-В97.

3. *Попова Т.Ю.* Нормальная центропроективная связность гиперполосы CH^r_m проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1998. Вып.29. С.59-63.

4. *Попов Ю.И., Столяров А.В.* Специальные классы регулярных полос. Калининград, 1992. 80 с.

5. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос. Калининград, 1983. 82 с.

T.Ju. M a k s a k o v a

DUAL IMAGE OF CENTRED TANGENTIAL DEGENERATE HYPERSTRIP CH^r_m

Investigation of inner geometry of centred tangential degenerate hyperstrip CH^r_m goes on. It is shown, that in differential neighbourhood of the second order hyperstrip

CH_m^r induces projective space $\overline{P}_n(V_r)$, which is dual to initial one $P_n(V_r)$ concerning involutory transformation J, generated by the hyperstrip CH_m^r. Dual image of equipped hyperstrip CH_m^r regarding transformation J is introduced in the consideration.