ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I5 1984

УДК 514.75

В.Н.Худенко

О СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРИК

Рассматривается связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием квадрик. Показано, что оснащение Бортолотти позволяет ввести связность в главном расслоении, найдены частные классы, в которых оснащение Бортолотти возникает внутренним образом, в одном из них дана геометрическая характеристика оснащающей плоскости.

1. Данная работа является продолжением работы [1]. Напомним, что в n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается невырожденное, h-параметрическое многообразие $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p $(1 \leq p \leq n-2)$ [2]. Пространство P_n отнесено к реперу $R=\{A_J\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_J = \omega^K_J A_K, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^K_J удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega^K_J = \omega^L_J \wedge \omega^K_L. \tag{2}$$

Индексы принимают значения

$J, L, K = 1, 2, \ldots, n+1; \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = 1, 2, \ldots, p+2;$

$a, b, c = p+3, p+4, \ldots, n+1; \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, h.$

Вершины A_α репера R помещены в $(p+1)$-мерной плоскости квадрики Q_p (плоскости L_{p+1}), вершины A_a - вне этой плоскости. Квадрика Q_p определяется системой уравнений

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0, \tag{3}$$

причем $\det(a_{\alpha\beta}) = 1$. Многообразие $(h,h,n)^2_p$ задано параметрически системой уравнений

$$\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha i} \tau^i, \tag{4}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i} \tau^i, \tag{5}$$

где

$$\theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta + \frac{2}{p+2} a_{\alpha\beta}\omega^\gamma_\gamma, \tag{6}$$

а τ^i - инвариантные формы бесконечной аналитической группы преобразований h-мерного пространства параметров, удовлетворяющие структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\tau^i = \tau^j \wedge \tau^i_j,$$
$$\mathcal{D}\tau^i_j = \tau^k_j \wedge \tau^i_k + \tau^k \wedge \tau^i_{kj}, \tag{7}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

С многообразием $(h,h,n)^2_p$ ассоциируется главное расслоение $G(B_h)$ со структурными уравнениями (7) и (8)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\omega^c_a &= \omega^b_a \wedge \omega^c_b + \tau^i \wedge \omega^c_{ia}, \\ \mathcal{D}\omega^\beta_\alpha &= \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \tau^i \wedge \omega^\beta_{\alpha i}, \\ \mathcal{D}\omega^\alpha_a &= \omega^\beta_a \wedge \omega^\alpha_\beta + \omega^b_a \wedge \omega^\alpha_b, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\omega^c_{ia} = -\Lambda^c_{\alpha i}\omega^\alpha_a, \quad \omega^\beta_{\alpha i} = \Lambda^a_{\alpha i}\omega^\beta_a.$

Базой расслоения $G(B_h)$ является многообразие B_h (h-параметрическое многообразие плоскостей L_{p+1}) или область пространства параметров, а типовым слоем - подгруппа стационарности плоскости L_{p+1}. В главном расслоении $G(B_h)$ задана связность по Г.Ф.Лаптеву [3] с помощью поля объекта связности $\Gamma = \{\Gamma^\alpha_{ai}, \Gamma^b_{ai}, \Gamma^\beta_{\alpha i}\}$ на базе B_h:

$$\nabla\Gamma^\beta_{\alpha i} + \omega^\beta_{\alpha i} = \Gamma^\beta_{\alpha ij}\tau^j; \quad \nabla\Gamma^c_{ai} + \omega^c_{ai} = \Gamma^c_{aij}\tau^j;$$

$$\nabla\Gamma^\alpha_{ai} + \Gamma^b_{ai}\omega^\alpha_b - \Gamma^\alpha_{\beta i}\omega^\beta_a = \Gamma^\alpha_{aij}\tau^j.$$

С помощью системы точек $B_a = A_a + \lambda^\alpha_a A_\alpha$ задано оснащение Бортолотти, где

$$\nabla\lambda^\alpha_a + \omega^\alpha_a = \lambda^\alpha_{ai}\tau^i. \tag{9}$$

В работе [1] показано, что оснащение Бортолотти позволяет ввести связность в главном расслоении. Покажем, что в некоторых частных классах многообразий $(h,h,n)^2_p$ оснащение Бортолотти возникает внутренним образом.

2. Рассмотрим частный класс многообразий $(k,k,n)^2_p$, когда $k=(p+2)(n-p-1)$. В этом случае исследуемое многообразие квадрик (назовем его V^*) можно задавать замкнутой системой уравнений

$$\theta_{\alpha\beta}=\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta a}\,\omega^a_{\gamma}, \qquad \Delta\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta a}\wedge\omega^{\gamma}_a=0, \tag{10}$$

где

$$\Delta\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta a}=\nabla\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta a}-2\,a_{\eta(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)}\,\omega^{\eta}_a+\frac{2}{p+2}\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta a}\,\omega^{\eta}_{\eta}+\frac{2}{p+2}a_{\alpha\beta}\,\omega^{\gamma}_a. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$\tilde{\lambda}^{\alpha}_a\overset{def}{=}-\frac{p+2}{p^2+5p+4}\Lambda^{\gamma}_{\gamma\beta a}\,a^{\alpha\beta}, \tag{12}$$

где $a^{\alpha\beta}$ – элементы матрицы, обратной к матрице $(a_{\alpha\beta})$. Продифференцировав соотношение (12), с учетом уравнений (7), (10), (11), получим

$$\nabla\tilde{\lambda}^{\alpha}_a+\omega^{\alpha}_a=\tilde{\lambda}^{\alpha}_{ai}\,\tau^i. \tag{13}$$

Из соотношений (9) и (13) следует утверждение:

Т е о р е м а 1. Оснащение Бортолотти семейств B_k плоскостей L_{p+1}, индуцированных многообразием V^*, возникает внутренним образом.

3. Рассмотрим многообразие $(n-1,n-1,n)^2_1$, т.е. конгруэнцию коник Q_1 в P_n, которая будет определяться системами уравнений (4), (5), но индексы принимают значения $i,j,k=1,2,\ldots,n-1$; $\alpha,\beta,\gamma=1,2,3$. Как следует из работы [4], каждая коника $Q_1\in(n-1,n-1,n)^2_1$ обладает 2n фокальными точками, определяемыми в данном случае системой алгебраических уравнений

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0,\quad x^a=0,\qquad \det\begin{vmatrix}\Lambda_{\alpha\beta i}x^{\alpha}x^{\beta}\\ \Lambda^a_{\alpha i}x^{\alpha}\end{vmatrix}=0, \tag{14}$$

(здесь i – номер столбца). Проведем адаптацию репера, положив

$$a_{11}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0,$$

$$\det\begin{vmatrix}\Lambda_{11i}\\ \Lambda^a_{1i}\end{vmatrix}=\det\begin{vmatrix}\Lambda_{22i}\\ \Lambda^a_{2i}\end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

Геометрически фиксация (15) означает, что вершины A_1 и A_2 помещены в фокальные точки коники, A_3 полярно им сопряжена.

Выберем величины λ^{α}_a так, чтобы они удовлетворяли уравнениям:

$$\begin{vmatrix}\lambda^j_a & \delta^3_a & \delta^4_a & \ldots & \delta^{n+1}_a\\ \Lambda^j_{i_1} & \Lambda^3_{i_1} & \Lambda^4_{i_1} & \ldots & \Lambda^{n+1}_{i_1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \Lambda^j_{i_{n-1}} & \Lambda^3_{i_{n-1}} & \Lambda^4_{i_{n-1}} & \ldots & \Lambda^{n+1}_{i_{n-1}}\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix}\lambda^1_a & \lambda^2_a & \delta^4_a & \ldots & \delta^{n+1}_a\\ \Lambda^1_{31} & \Lambda^2_{31} & \Lambda^4_{31} & \ldots & \Lambda^{n+1}_{31}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \Lambda^1_{3n-1} & \Lambda^2_{3n-1} & \Lambda^4_{3n-1} & \ldots & \Lambda^{n+1}_{3n+1}\end{vmatrix}=0. \tag{16}$$

Получим утверждение, дающее геометрическую характеристику оснащающей плоскости.

Т е о р е м а 2. Если величины λ^{α}_a удовлетворяют системе уравнений (16), то оснащающая плоскость является (n-3)-мерной плоскостью, являющейся пересечением трех касательных гиперплоскостей, проведенных к фокальным поверхностям (A_1), (A_2) и поверхности (A_3).

Список литературы

1. Худенко В.Н. Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием квадрик.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с.99-102.

2. Худенко В.Н. К геометрии многообразий многомерных квадрик.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 11, Калининград, 1980, с.98-101.

3. Остиану Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей.- Тр. геометр. семинара, ВИНИТИ АН СССР, 1969, т.2, с.247-262.

4. Худенко В.Н. О фокальных образах многообразий многомерных квадрик.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 9, Калининград, 1978, с.118-123.