УДК 514.75

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ВДОЛЬ НОРМАЛИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^n

М.А. Ч е ш к о в а

(*Алтайский государственный университет)*

В евклидовом пространстве E^n рассматриваются две гладкие гиперповерхности $M, \overline{M}$ и диффеоморфизм $f: M \to \overline{M}$ вдоль нормали n к гиперповерхности M.

Обозначим $F(M)$ - R-алгебру дифференцируемых на т функций , $T^q_s(M)$- F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q,s), $\chi(M)$ - алгебру Ли векторных полей на M, ∂ - дифференцирование и <,> - скалярное произведение в E^n.

Формулы Гаусса-Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [1, с.36]

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + b(X,Y)n, \quad \partial_{X^n} = -AX, \tag{1}$$

где $A \in T^1_1(M), \quad X,Y \in \chi(M), \quad b \in T^0_2(M), \quad b(X,Y)$- вторая фундаментальная форма, A - оператор Вейнгартена, ∇- связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) = <X,Y>$.

Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$R(X,Y) = b(Y,Z)AX - b(X,Z)AY, \quad dA(X,Y) = 0, \tag{2}$$

где $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$- тензор кривизны связности ∇, $dA(X,Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X,Y]$ - внешний дифференциал поля A в связности ∇.

Обозначим через r - радиус-вектор точки p $\in$ M, через $\bar{r}$- радиус-вектор точки f(p). Тогда отображение $f: M \to \overline{M}$ имеет вид

$$f(r) = \bar{r} = r + \psi n, \quad \psi \in F(M). \tag{3}$$

Откуда

$$df(X) = X + (X\psi)n - \psi AX, \quad X \in \chi(M).$$

Отображение f индуцирует на M метрику $\bar{g}(X,Y) = < df(X), df(Y) >$ и связность Леви-Чивита $\overline{\nabla}$ метрики $\bar{g}$.

Пусть $\bar{b}$ - вторая фундаментальная форма гиперповерхности $\overline{M}$, $\bar{n}$- орт нормали к $\overline{M}$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\partial_X df Y - df\overline{\nabla}_X Y = \bar{b}(X,Y)\bar{n}. \tag{4}$$

*Доказательство***.** Покажем, что если $\bar{b}$ удовлетворяет (4), то $\bar{\nabla}$ есть связность Леви-Чивита метрики $\bar{g}$. Имеем $< dfZ, n >= 0$,

$$Z\bar{g}(X,Y) =< \partial_Z dfX, dfY > + < dfX, \partial_Z dfY >=$$
$$=< df\bar{\nabla}_Z X + \bar{b}(Z,X)\bar{n}, dfY > + < dfX, df\bar{\nabla}_Z Y + \bar{b}(Z,Y)\bar{n}.$$

Откуда $Z\bar{g}(X,Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_Z X, Y) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Z Y)$, т. е. связность $\bar{\nabla}$ согласована с метрикой $\bar{g}$. Так как

$$\partial_X dfY = \partial_X \partial_Y \bar{r},\ \ \partial_X \partial_Y \bar{r} - \partial_Y \partial_X \bar{r} - \partial_{[X,Y]} \bar{r} = 0,$$

то получим

$$df\bar{\nabla}_X Y - df\bar{\nabla}_Y X - df[X,Y] + \bar{b}(X,Y)\bar{n} - \bar{b}(Y,X)\bar{n} = 0.$$

Приравнивая к нулю касательные и нормальные составляющие к $\bar{M}$, получим

$$df(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y]) = 0, \quad \bar{b}(X,Y)\bar{n} - \bar{b}(Y,X)\bar{n} = 0.$$

Так как f - диффеоморфизм, то $\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y] = 0$, $\bar{b}(X,Y) - \bar{b}(Y,X) = 0$, т.е. кручение связности $\bar{\nabla}$ равно нулю. Следовательно, $\bar{\nabla}$ - есть связность Леви-Чивита метрики $\bar{g}$, а билинейная форма $\bar{b}$ - симметричная.

Разложим $\bar{n}$ на касательную и нормальную составляющие

$$\bar{n} = U + \ell n, \quad U \in \Xi(M), \quad \ell \in F(M).$$

Теорема 1. *Если* $f: M \to \bar{M}$ *отображение вдоль нормали к* M*, то*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - (X\psi)AY - (Y\psi)AX - \psi(\bar{\nabla}^*_X A)(Y) - \bar{b}(X,Y)U, \tag{5}$$

$$\mathrm{Hess}^{\bar{\nabla}}_{X,Y}\psi = \bar{b}(X,Y)\ell + \psi b(X,AY) - b(X,Y), \tag{6}$$

где $\mathrm{Hess}^{\bar{\nabla}}_{X,Y}\psi = XY\psi - \bar{\nabla}_X Y\psi$ - *гессиан функции* ψ *в связности* $\bar{\nabla}$, $(\bar{\nabla}^*_X A)Y = \nabla_X AY - A\bar{\nabla}_Y Y$ - *ковариантная производная поля* A *в связности* $\nabla \oplus \bar{\nabla}$.

Доказательство. В силу (3),(1) имеем

$$\partial_X dfY = \nabla_X Y + b(X,Y)n + (XY\psi)n - (Y\psi)AX - (X\psi)AY - \psi\nabla_X AY -$$
$$-\psi b(X,AY)n, \quad df\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + (\bar{\nabla}_X Y)(\psi)n - \psi A\bar{\nabla}_X Y.$$

С другой стороны,

$$\partial_X dfY - df\bar{\nabla}_X Y = \bar{b}(X,Y)(U + \ell n).$$

Расписав левую часть и приравняв касательные и нормальные компоненты, получим (5) и (6).

Рассмотрим g, b, A в базисе $X_i \in T_pM,\ \ i = 1,\dots n-1.$

Теорема 2. *Если* $f: M \to \bar{M}$ *отображение вдоль нормали к* M*, то*

$$\bar{\Delta}\psi = (n-1)\bar{H}\ell + \psi b_{ik}A^k_j\bar{g}^{ij} - b_{ij}\bar{g}^{ij}, \tag{7}$$

где $\overline{\Delta}\psi = \overline{g}^{ij}\mathrm{Hess}_{ij}^{\overline{\nabla}}\psi$ - *лапласиан функции ψ в метрике* $\overline{g}$, $\overline{H}$ - *средняя кривизна гиперповерхности* $\overline{M}$.

Доказательство. Расписав (6) в координатах и свернув с $\overline{g}^{ij}$, получим (7).

Если M - гиперплоскость, то $A = 0$,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \overline{b}(X,Y)U, \quad \overline{\Delta}\psi = (n-1)\overline{H}\ell.$$

В частности, если $\overline{M}$ - минимальная гиперповерхность, то функция ψ - горизонтальная и удовлетворяет уравнению Лапласса $\overline{\Delta}\psi = 0$.

Если M - гиперсфера радиуса ρ, то $A = -\frac{1}{\rho}\delta$,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X)Y + \omega(Y)X + c(X,Y)U,$$

$$\omega(X) = X\ln|\rho + \psi|, \; c(X,Y) = \frac{\rho}{\rho+\psi}\overline{b}(X,Y),$$

$$\overline{\Delta}\psi = (n-1)\overline{H}\ell + \frac{\rho+\psi}{\rho^2}g_{ij}\overline{g}^{ij}.$$

Библиографический список

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т2. 414 с.

M.A. C h e s h k o v a

ON A MAPPING OF A HYPERSURFACE ALONG NORMAL IN THE EUCLIDEAN SPACE

A pair of smooth hypersurface $M, \overline{M}$ and a mapping $f{:}M \to \overline{M}$ along normal to the hipersurface M in Euclidean space are examined. Function ψ of distance between corresponding points of the hipersurface is considered.

УДК 514.76

ПРИМЕРЫ НЕГОЛОНОМНЫХ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И. Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

Голономное и неголономное гладкие многообразия определяются в зависимости от полноты дифференциалов элементов подвижного репера многообразия. Получены формулы, показывающие эквивалентность полноты этих дифферен-