ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Е.А.Хляпова

КОНГРУЭНЦИИ T_1

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются специальные типы конгруэнций φ_2, порожденных центральной коникой F_1 и точкой F_2, не инцидентной плоскости коники F_1 — конгруэнции T_1. Доказано, что существует два и только два класса конгруэнций T_1: конгруэнции T_{11} и конгруэнции T_{12}. Свойства конгруэнций T_{11} подробно изучались в работе [3]. В данной работе основное внимание уделяется исследованию поверхности (F_2) некоторого подкласса T'_{11} конгруэнции T_{11}. Доказано, что директрисами Вильчинского поверхности (F_2) конгруэнции являются аффинная нормаль этой поверхности в точке F_2 и несобственная прямая касательной плоскости поверхности (F_2) в этой же точке. В этом случае соответствующая линейная конгруэнция расслаивается на однопараметрическое семейство пучков прямых, коллинеарных касательной плоскости поверхности (F_2) в точке F_2 и имеющих центр, инцидентный аффинной нормали этой поверхности в точке F_2.

§ I. Конгруэнции T_{11} и T_{12}

Отнесем конгруэнцию φ_2 к подвижному реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$, начало A которого совмещено с точкой F_2, концы E_α векторов $\bar{e}_\alpha$ расположены на конике F_1 таким образом, что прямые E_1E_2, CE_3, где C — центр коники F_1, являются сопряженными диаметрами коники F_1, причем прямая E_1E_2 коллинеарна касательной плоскости поверхности (F_2) в точке F_2.

Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции φ_2 и уравнения коники F_1 имеют соответственно вид:

$$\omega^3=\Gamma^3_i\omega^i,\quad \omega^\beta_\alpha=\Gamma^\beta_{\alpha i}\,\omega^i,\quad \Gamma^3_1=\Gamma^3_2;$$
$$(x^1)^2+(x^2)^2-x^1-x^2=0,\quad x^1+x^2+x^3=1, \tag{1}$$

где ω^α, ω^β_α — компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, $\omega^1\wedge\omega^2\neq 0$, $i,j,k=1,2$.

Определение. Конгруэнция φ_2 называется конгруэнцией T_1, если выполнены следующие условия: 1/ прямолинейные конгруэнции (AE_3) и (E_1E_2) двусторонне расслояемы [1]; 2/ прямолинейная конгруэнция (AE_i) и конгруэнция координатных плоскостей $(A,\bar{e}_j,\bar{e}_3)$ (здесь и в дальнейшем $i\neq j$) односторонне аффинно расслояемы [2]; 3/ поверхность (E_i) является огибающей плоскостей $(A,\bar{e}_i,\bar{e}_3)$; 4/ на индикатрисе вектора $\bar{e}_i$ касательная вдоль линии $\omega^j=0$ коллинеарна плоскости $(A,\bar{e}_j,\bar{e}_3)$.

Условия, характеризующие конгруэнции T_1, аналитически записываются в виде:

$$\omega^j_i=-\omega^j, \tag{2}$$

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{22}=0, \tag{3}$$

$$\omega^i\wedge\omega^i_i=0,\quad \omega^k\wedge\omega^3_k=0,\quad \omega^3_i\wedge\omega^j_3=0, \tag{4}$$

$$\omega^1\wedge\omega^1_3+\omega^2\wedge\omega^2_3=0,\quad \omega^3_i\wedge\omega^i_3+(-1)^i\omega^1\wedge\omega^2=0$$

$$\omega^3\wedge\omega^i_3+(-1)^{i+1}\omega^1\wedge\omega^2=0, \tag{4}$$

(здесь и в дальнейшем по i и j не суммировать!)

или, используя систему уравнений (2), в виде:

$$\Gamma^1_{12}=0,\ \Gamma^2_{21}=0,\ \Gamma^3_{21}=\Gamma^3_{12},\ \Gamma^3_{11}\Gamma^2_{32}-\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{32}=0,$$

$$\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{32}-\Gamma^3_{22}\Gamma^1_{31}=0,\ \Gamma^1_{32}=\Gamma^2_{31},\ \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{32}-\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{31}=1,$$

$$\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{32}-\Gamma^3_{22}\Gamma^1_{32}=-1,\quad \Gamma^3_1(\Gamma^1_{32}-\Gamma^1_{31})=-1, \tag{5}$$

$$\Gamma^3_1(\Gamma^2_{32}-\Gamma^1_{32})=1.$$

Анализируя системы (4) и (5), получаем

$$\omega^1_1=0,\quad \omega^2_2=0,\quad \Gamma^2_{32}=\Gamma^1_{31}, \tag{6}$$

$$\Gamma^1_{31}(\Gamma^3_{11}-\Gamma^3_{22})=0. \tag{7}$$

Т е о р е м а. Существует два и только два класса конгруэнций T_1: конгруэнции T_{11} ($\Gamma^1_{31}=0$), определяемые с произволом одной функции двух аргументов, и конгруэнции T_{12} ($\Gamma^1_{31}\neq 0,\ \Gamma^3_{11}=\Gamma^3_{22}$), определяемые с произволом одной функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (7) возникает две альтернативы:

I/ $\Gamma^1_{31}=0$, (8) 2/ $\Gamma^3_{11}=\Gamma^3_{22},\ \Gamma^1_{31}\neq 0$ (9)

(случай $\Gamma^1_{31}=0,\ \Gamma^3_{11}=\Gamma^3_{22}$ дает подкласс конгруэнций T_{11}).

I/Замкнутая система уравнений Пфаффа конгруэнции T_{11}

записывается в виде:

$$\omega^3=a(\omega^1+\omega^2),\ \omega^1_1=\omega^2_2=0,\ \omega^2_1=-\omega^2,\ \omega^3_1=a\omega^1,$$

$$\omega^1_2=-\omega^1,\ \omega^3_2=-a\omega^2,\ a\omega^1_3=-\omega^2,\ a\omega^2_3=-\omega^1, \tag{10}$$

$$\omega^3_3=b_k\omega^k,\quad da=-a\omega^3_3,\quad db_k\wedge\omega^k=0,$$

где $a=\Gamma^3_1$, $b_i=\Gamma^3_{3i}$.

Система уравнений (10) в инволюции и определяет конгруэнции T_{11} с произволом одной функции двух аргументов.

2/Обозначая

$$\Gamma^3_1=a,\ \Gamma^3_{12}=b,\ A=\frac{b}{a(2b+a)},\ B=\frac{a+b}{a(2b+a)},$$

запишем систему уравнений Пфаффа конгруэнции T_{12} в виде:

$$\omega^3=a(\omega^1+\omega^2),\ \omega^1_1=\omega^2_2=0,\ \omega^2_1=-\omega^2,\ \omega^1_2=-\omega^1,$$

$$\omega^3_1=-(a+b)\omega^1+b\omega^2,\ \omega^3_2=b\omega^1-(a+b)\omega^2, \tag{11}$$

$$\omega^1_3=A\omega^1-B\omega^2,\ \omega^2_3=-B\omega^1+A\omega^2,\ \omega^3_3=\Gamma^3_{3k}\omega^k,$$

причем $b\neq 0$ (12),

так как по условию $\Gamma^1_{31}\neq 0$.

Замыкание системы уравнений (11) дает:

$$\Omega_1\wedge(\omega^1+\omega^2)=0,\ \Omega_1\wedge\omega^1-\Omega_2\wedge(\omega^2-\omega^1)+b\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$\Omega_1\wedge\omega^2-\Omega_2\wedge(\omega^1-\omega^2)-b\omega^1\wedge\omega^2=0,\ \Omega_3\wedge\omega^1-\Omega_4\wedge\omega^2-$$

$$-A\omega^1\wedge\omega^2=0,\ \Omega_4\wedge\omega^1-\Omega_3\wedge\omega^2-A\omega^1\wedge\omega^2=0, \tag{13}$$

где

$$\Omega_1=da+a\omega^3_3,\quad \Omega_2=db+b\omega^3_3,$$

$$\Omega_3=dA-A\omega^3_3,\quad \Omega_4=dB-B\omega^3_3.$$

Из системы (13) имеем:

$$\Omega_1 = \alpha\,(\omega^1 + \omega^2). \qquad (14)$$

Складывая почленно (4) и (5) уравнения системы (13), получаем

$$\Omega_3 - \Omega_4 = \beta\,(\omega^1 + \omega^2), \qquad (15)$$

которое, с учетом (14), приводится к виду:

$$\Omega_2 = \frac{(2b+a)^2}{2}\,(\beta - \alpha)\,(\omega^1 + \omega^2). \qquad (16)$$

Подставляя уравнения (14) и (16) в оставшиеся квадратичные уравнения системы (13), получаем

$$\alpha = \frac{ab}{2b+a}, \quad \beta = \frac{2b^2 + ab\,(2b+a)}{(2b+a)^3}. \qquad (17)$$

Следовательно, учитывая (17) в (14) и в (16), имеем:

$$\Omega_1 = \frac{ab}{2b+a}\,(\omega^1 + \omega^2), \quad \Omega_2 = \frac{b^2}{2b+a}\,(\omega^1 + \omega^2) \qquad (18)$$

Замыкание уравнений (18) дает:

$$\frac{ab}{2b+a}\,\omega_3^3 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0, \quad \frac{b^3}{(2b+a)^2}\,\omega_3^3 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0,$$

или

$$\frac{ab}{2b+a}\,(\Gamma^3_{31} - \Gamma^3_{32}) = 0, \quad \frac{b^3}{(2b+a)^2}\,(\Gamma^3_{31} - \Gamma^3_{32}) = 0. \qquad (19)$$

Так как из (12) $b \neq 0$, то из уравнения (19) имеем:

$$\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{32}. \qquad (20)$$

Следовательно, замкнутая система уравнений Пфаффа конгруэнции T_{12} имеет вид:

$$\omega^3 = a\,(\omega^1 + \omega^2), \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^2 = -\omega^2, \quad \omega_2^1 = -\omega^1,$$

$$\omega_1^3 = -(a+b)\,\omega^1 + b\,\omega^2, \quad \omega_2^3 = b\,\omega^1 - (a+b)\,\omega^2, \quad \omega_3^1 = A\,\omega^1 - B\,\omega^2,$$

$$\omega_3^2 = -B\,\omega^1 + A\,\omega^2, \quad \omega_3^3 = \Gamma^3_{31}\,(\omega^1 + \omega^2), \quad da = a^2 A\,(\omega^1 + \omega^2) - a\,\omega_3^3,$$

$$db = abA\,(\omega^1 + \omega^2) - b\,\omega_3^3, \quad d\Gamma^3_{31} \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0 \qquad (21)$$

Система уравнений (21) в инволюции и определяет конгруэнции T_{12} с произволом одной функции одного аргумента. Таким образом, теорема доказана.

§ 2. Конгруэнции T'_{11}

О п р е д е л е н и е. Конгруэнция T_{11} называется конгруэнцией T'_{11}, если касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_3$ коллинеарна плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Аналитически условие, выделяющее конгруэнции T'_{11} из конгруэнций T_{11}, записывается в виде:

$$b_1 = b_2 = 0. \qquad (21)$$

Учитывая эти соотношения в (10), убеждаемся, что система уравнений Пфаффа конгруэнции T'_{11}

$$\omega^3 = a\,(\omega^1 + \omega^2), \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^2 = -\omega^2, \quad \omega_1^3 = -a\,\omega^1,$$

$$\omega_2^1 = -\omega^1, \quad \omega_2^3 = -a\,\omega^2, \quad a\,\omega_3^1 = -\omega^2, \quad a\,\omega_3^2 = -\omega^1, \quad \omega_3^3 = 0,$$

$$da = 0$$

вполне интегрируема.

Т е о р е м а. Фокальные точки коники F_1 конгруэнции (F_1) тогда и только тогда являются неопределенными, когда касательная плоскость поверхности (A) в точке A делит пополам отрезок, заключенный между центром C коники F_1 и точкой E_3.

Доказательство. Касательная плоскость поверхности (A) в точке A делит пополам отрезок CE_3 тогда и только тогда, когда

$$a=1.$$

Уравнения для определения координат фокальных точек коники F_1 записываются в виде:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-x^1-x^2=0, \quad x^1+x^2+x^3=1,$$

$$(a-1)(x^1-x^2)\left(2(a+1)\left((x^1)^2+(x^2)^2\right)-2(a^2-2a-1)x^1x^2+\right.$$

$$\left.+(a^2-4a-4)(x^1+x^2)+(a+1)(3-a)\right)=0.$$

Следовательно, фокальные точки коники F_1 не определены тогда и только тогда, когда

$$a=1,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Соприкасающиеся линейные комплексы асимптотических линий поверхности (A)

В [3] для конгруэнции T_{11} найдены аффинная нормаль поверхности (A), асимптотические линии и касательные к асимптотическим линиям на этой поверхности.

Перейдем к новому реперу $\{A, \bar{A}_\alpha\}$, выбирая в качестве базисных векторов направляющие векторы $\bar{A}_3$ аффинной нормали поверхности (A) и $\bar{A}_i$ — касательных к асимптотическим линиям на этой же поверхности. Имеем:

$$\bar{A}_1=\bar{e}_1+a\bar{e}_3, \quad \bar{A}_2=\bar{e}_2+a\bar{e}_3, \quad \bar{A}_3=\bar{e}_1+\bar{e}_2.$$

Деривационные формулы нового репера $\{A, \bar{A}_\alpha\}$ имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^k\bar{A}_k, \quad d\bar{A}_1=-\omega^1\bar{A}_2-\omega^2\bar{A}_3,$$
$$d\bar{A}_2=-\omega^1\bar{A}_3-\omega^2\bar{A}_1, \quad d\bar{A}_3=-\omega^k\bar{A}_k.$$

Соприкасающийся линейный комплекс асимптотической линии поверхности (A) есть предельное положение линейного комплекса

$$b^{01}p^{23}+b^{02}p^{31}+b^{03}p^{12}+b^{12}p^{03}+b^{31}p^{02}+b^{23}p^{01}=0,$$

где p^{ab} $(a,b=0,1,2,3)$ — плюккеровы координаты прямой, проведенной через пять близких касательных данной асимптотической линии при стремлении всех их к касательной этой линии в точке A [4].

Соприкасающийся линейный комплекс асимптотической линии $\omega^1=0$ поверхности (A) имеет уравнение

$$p^{03}-p^{12}=0,$$

а асимптотической линии $\omega^2=0$ — уравнение

$$p^{03}+p^{12}=0.$$

Из пучка

$$(1+\lambda)p^{03}+(1-\lambda)p^{12}=0 \tag{22}$$

линейных комплексов выделим специальный линейный комплекс, коэффициенты которого удовлетворяют условию Плюккера

$$b^{01}b^{23}+b^{02}b^{31}+b^{03}b^{12}=0,$$

которое для (22) принимает вид:

$$(1+\lambda)(1-\lambda)=0$$

или

$$\lambda=1\ ,\ \lambda=-1\ .$$

Т е о р е м а. Аффинная нормаль поверхности (A) в точке A и несобственная прямая касательной плоскости поверхности (A) в этой же точке являются директрисами Вильчинского.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\lambda=-1$ плюккеровы координаты первой директрисы Вильчинского имеют вид:

$$P^{03}=-2\ ,$$

остальные координаты равны нулю.

Следовательно, первая директриса Вильчинского задается в репере $\{A,\bar{A}_\alpha\}$ точкой $A\,(0,0,0)$ и вектором $\bar{A}_3\ (0,0,1)$, который коллинеарен аффинной нормали поверхности (A) в точке A .

При $\lambda=1$: $P^{12}=2$, остальные координаты равны нулю, т.е. вторая директриса Вильчинского задается двумя несобственными точками $(0,1,0,0)$ и $(0,0,1,0)$, принадлежащими касательной плоскости поверхности (A) в точке A .

В этом случае соответствующая линейная конгруэнция расслаивается на однопараметрическое семейство пучков прямых, коллинеарных касательной плоскости поверхности (A) в точке A и имеющих центр, инцидентный аффинной нормали этой поверхности в точке A .

Список литературы

I. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций. М.-Л., ГИТТЛ, 1956.

2. Т к а ч Г.П. Аффинно расслояемые пары многообразий фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. Тезисы докладов 5-й Всесоюзной межвузовской конференции по геометрии Самарканд. 1972, с. 215.

3. Х л я п о в а Е.А. Об одном классе конгруэнций пар фигур, порожденных центральной коникой и точкой. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 4. Калининград, 1974, с. 186-192.

4. Ш и р о к о в П.А. и Ш и р о к о в а А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. М., Физматгиз, 1959.