2) асимптотические линии на поверхностях (A_0) и (A_3) конгруэнции $\mathcal{L}''$ соответствуют; 3) прямолинейные конгруэнции (A_0A_3) конгруэнций $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ вырождаются в связки прямых, а поверхности (A_i) вырождаются в линии, касательные к которым пересекаются.

Доказательство. 1) Квадрика

$$\Phi \equiv x^1x^2 - x^0x^3 + \frac{1}{2}(x^3)^2 = 0$$

инвариантна, т.к. $d\Phi = 2\theta\Phi$. Она содержит точку A_0 и прямые A_0A_i квадрики $Q \in \mathcal{L}'$.

2) Уравнения асимптотических линий поверхностей (A_0) и (A_3) конгруэнции $\mathcal{L}''$ приводятся к одному и тому же виду:

$$\omega^1\omega^2 = 0 .$$

3) Все прямые конгруэнции (A_0A_3) содержат инвариантную точку $L = mA_0 - A_3$, $dL = \omega_3^3 L$, которая является центром связки. Для конгруэнций $\mathcal{L}'$ имеем:

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega^j\left((c+m)A_0 + A_3\right).$$

Следовательно, касательные к линиям (A_i) пересекаются в точке $M' = (c+m)A_0 + A_3$. Аналогично, касательные к линиям (A_i) конгруэнции $\mathcal{L}''$ пересекаются в точке $M'' = a_1a_2A_0 + a_2A_1 + a_1A_2 + (1+b)A_3$.

Библиографический список

1. Малаховский В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986.

2. Шмелева С.В. Об одном классе конгруэнций линейчатых квадрик с нераспадающейся фокальной коникой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1993. Вып.24. С.123-126.

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ПАР ТОЧЕК В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.П.Бугаева

(Калининградский государственный университет)

В четырехмерном проективном пространстве рассмотрено вырожденное многообразие $(PP^*)_{3,1}$, порожденное точкой P, описы-

вающей трехмерную поверхность (P) и точкой P^*, описывающей линию (P^*). Построен частично канонизированный репер многообразия $(PP^*)_{3,1}$, найдены ассоциированные геометрические образы и некоторые подклассы.

Отнесем четырехмерное проективное пространство P_4 к подвижному реперу $R = \{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,5})$. Деривационные формулы репера R имеют вид: $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства: $D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности: $\omega_\alpha^\alpha = 0$.

Рассмотрим вырожденную конгруэнцию $(PP^*)_{3,1}$ [1], порожденную точками P и P^*, в которой семейство (P)-трехпараметрическое (гиперповерхность), а семейство (P^*)-однопараметрическое (линия). Соответствие между элементами пары (PP^*) установим следующим образом: каждой точке P поверхности (P) поставим в соответствие единственную точку P^* линии (P^*), полным прообразом которой является некоторая двумерная поверхность π_{P^*} на гиперповерхности (P).

Совместим вершину A_1 репера R с точкой P, вершины A_2, A_3 и A_4 поместим в касательную гиперплоскость T к гиперповерхности (P) в точке P, вершину A_5 совместим с точкой P^*, причем A_4 поместим в точку пересечения касательной к линии (P^*) в точке P^* с касательной гиперплоскостью T. Формы ω_1^{a+1}, ω_5^a $(a = \overline{1,5})$ являются структурными формами конгруэнции $(PP^*)_{3,1}$. Выберем формы ω_1^2, ω_1^3 и ω_5^4 за базисные и обозначим

$$\omega_1^2 = \theta_1, \quad \omega_1^3 = \theta_2, \quad \omega_5^4 = \theta_3 \quad (\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \neq 0). \qquad (1)$$

Проведем аналитическую канонизацию репера. Тогда система пфаффовых уравнений конгруэнции $(PP^*)_{3,1}$ примет вид:

$$\begin{cases} \omega_1^5 = \omega_5^1 = \omega_5^2 = \omega_5^3 = \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0, & \omega_4^3 = k^3\theta_3, \quad \omega_1^4 = \theta_3, \\ \omega_{i+1}^5 = \lambda^{ij}\theta_j, \quad \omega_3^1 = m^k\theta_k, & \omega_3^2 = n^k\theta_k, \quad \omega_2^1 = c^k\theta_k, \\ \omega_2^3 = \tau^1\theta_1 + \tau^3\theta_3, \quad \omega_2^4 = p^{1k}\theta_k, & \omega_3^4 = p^{2k}\theta_k, \quad \omega_5^5 - \omega_1^1 = p^{3k}\theta_k. \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$\lambda^{ij} = \lambda^{ji}, \quad \lambda^{13} = 0, \quad \lambda^{23} \neq 0, \quad k^3 \neq 0, \quad p^{ij} = p^{ji} \quad (i,j,k = 1,2,3).$$

Геометрически построенный частично канонизированный репер характеризуется тем, что вершина A_4 описывает двумерное многообразие, т.к.

$$dA_4 = \omega_4^4 A_4 + \theta_3(k^3 A_3 + \lambda^{33} A_5) + \theta_2\lambda^{23} A_5,$$

4 Зак. 1606

а вершина A_3 является точкой пересечения касательных плоскостей к двумерному многообразию (A_4) и двумерному многообразию π_{P^*}, возникающему на трехмерной поверхности (P) при фиксации точки P^* на линии (P^*).

Осуществляя замыкание системы (2), убеждаемся, что она - в инволюции и определяет конгруэнцию $(PP^*)_{3,1}$ с произволом семи функций трех аргументов.

Исследуем некоторые подклассы конгруэнции $(PP^*)_{3,1}$.

Определение I. Конгруэнцией K_1 называется такая конгруэнция $(PP^*)_{3,1}$, для которой каждой фиксированной точке P^* на линии (P^*) соответствует торс на гиперповерхности (P).

Найдем условия, при которых гиперповерхность (P) расслаивается на торсы. Касательная к линии (P^*) в точке P^* определяется точками A_4 и A_5, т.к. $dA_5=\theta_3 A_4+\omega_5^5 A_5$. Точка $P^*=A_5$ фиксируется при $\theta_3=0$. Асимптотические направления на гиперповерхности (P) вдоль $\theta_3=0$ определяются уравнением:

$$\lambda^{11}\theta_1^2+2\lambda^{12}\theta_1\theta_2+\lambda^{22}\theta_2^2=0.$$

Если двумерная поверхность на гиперповерхности (P) - торс, то

$$\begin{vmatrix} \lambda^{11} & \lambda^{12} \\ \lambda^{12} & \lambda^{22} \end{vmatrix}=0 \iff \lambda^{11}\lambda^{22}=(\lambda^{12})^2. \qquad (3)$$

Задача имеет решение в следующих случаях:

I) $\lambda^{11}=0$, $\lambda^{22}\neq 0$, $\lambda^{12}=0$ (4)

(либо $\lambda^{11}\neq 0$, $\lambda^{22}=0$, $\lambda^{12}=0$), тогда условия (3) принимают вид: $\theta_2^2=0$ $(\theta_1^2=0)$, т.е. на двумерной поверхности π_{P^*} имеется единственное семейство асимптотических линий - прямолинейных образующих торсов;

2) $\lambda^{11}\neq 0$, $\lambda^{22}\neq 0$, $\lambda^{12}\neq 0$, обозначая $\frac{\lambda^{11}}{\lambda^{12}}=\frac{\lambda^{12}}{\lambda^{22}}=t$, имеем:

$$\lambda^{11}=t\lambda^{12},\quad \lambda^{22}=\frac{1}{t}\lambda^{12}, \qquad (5)$$

т.е. (4) и (5) - условия расслоения гиперповерхности (P) на торсы.

Конгруэнции K_1 определяются системой уравнений (2), в которой учтены условия (4), либо (5). Замкнутая система (2) - в инволюции и определяет конгруэнции K_1 с произволом семи функций трех аргументов.

Определение 2. Конгруэнцией K_2 называется такая конгруэнция $(PP^*)_{3,1}$, для которой двумерная поверхность π_{P^*}, возникающая на гиперповерхности (P) при фиксации точки P^* на линии (P^*), является плоскостью.

Касательная плоскость к двумерной поверхности на гиперповерхности (P) определяется точками $P=A_1$, A_2 и A_3, т.к. $dA_1|_{\theta_3=0}=\omega_1^1 A_1+\theta_1 A_2+\theta_2 A_3$. Если эта двумерная поверхность - плоскость, то

$$dA_2|_{\theta_3=0}=(\dots)A_1+(\dots)A_2+(\dots)A_3,\quad dA_3|_{\theta_3=0}=(\dots)A_1+(\dots)A_2+(\dots)A_3$$

Откуда условие расслоения трехмерной поверхности (P) на плоскости примет вид

$$p^{11}=p^{12}=p^{22}=\lambda^{11}=\lambda^{12}=\lambda^{22}=0. \qquad (6)$$

Конгруэнция K_2 определяется системой уравнений (2), в которой учтены условия (6). Замкнутая система уравнений (2) имеет общее решение с произволом четырех функций трех аргументов.

Библиографический список

I. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1973. Вып.3. С. 41-49.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КРАТНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Е.Ю.Бусуркина

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции невырожденных кривых второго порядка (коник) с кратными фокальными поверхностями, причем плоскости коник описывают двупараметрическое семейство. Найдены условия m-кратности $(m=\overline{1,6})$ одной фокальной поверхности, исследованы некоторые классы конгруэнции коник с одной, двумя и тремя кратными фокальными поверхностями.

Пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{0,3})$,