of numerals and under unlimited consecutive permutation of a numeral of prime number from the 1-st place to the last one.

The appropriatenesses in structure of some prime numbers subsets with quantity of numerals from two to six are found. For each natural number n a «tree» of prime numbers is constructed.

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

К.В. П о л я к о в а

(*Калининградский государственный университет*)

Поверхность проективного пространства рассмотрена как многообразие точек. Произведено оснащение Бортолотти этой поверхности, которое позволило задать центропроективные связности 2-х типов. Условия их совпадения фиксируют гиперплоскость Бортолотти. Эти условия являются необходимыми и достаточными для обращения в нуль псевдотензора кривизны индуцированной центропроективной связности. Описаны параллельные перенесения гиперплоскости Бортолотти в связностях обоих типов, которые оказались вырожденными.

1. **Центропроективная связность.** Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу R={A,A_I }, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I A + \omega_I^J A_J \quad (I,J,K=\overline{1,n}),$$

причем базисные формы ω^I, ω_I, ω_J^I проективной группы GP(n) удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad d\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$d\omega_J^I = \omega_J \wedge \omega^I + \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K.$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим поверхность X_m ($1 \le m<n$) как m-мерное многообразие точек. Произведем специализацию подвижного репера R, совмещая вершину A с точкой, описывающей поверхность X_m . Система дифференциальных уравнений поверхности X_m в полученном репере R^0 нулевого порядка имеет вид:

$$\omega^a = \Lambda_i^a \omega^i, \tag{1}$$

где i,j,k=$\overline{1,m}$; $a,b,c=\overline{m+1,n}$. Базисные формы ω^i поверхности X_n удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \overline{\omega}_j^i, \tag{2}$$

где $\overline{\omega}^i_j = \omega^i_j + \Lambda^a_j\omega^i_a$. Продолжая уравнения (1), получим

$$\Delta\Lambda^a_i + \omega^a_i = \Lambda^a_{ij}\omega^j \quad (\Lambda^a_{ij} = \Lambda^a_{ji}). \tag{3}$$

Дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda^a_i = d\Lambda^a_i + \Lambda^b_i\omega^a_b - \Lambda^a_j\overline{\omega}^j_i.$$

Объект Λ^a_i является фундаментальным объектом 1-го порядка поверхности X_m.

С поверхностью X_m в репере R^0 ассоциируется главное расслоение центропроективных реперов $G(X_m)$ со структурными уравнениями (1) и следующими:

$$d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^i \wedge \omega^I_{Ji}, \quad d\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega_J,$$

где

$$\omega^I_{Ji} = -\delta^I_J(\omega_i + \Lambda^a_i\omega_a) - \omega_J(\delta^I_i + \delta^I_a\Lambda^a_i),$$

δ^I_J - обычный, δ^J_i, δ^I_a - обобщенные символы Кронекера [1,с.16]. Базой главного расслоения $G(X_m)$ служит поверхность X_m, а типовым слоем - центропроективная (коаффинная) подгруппа $G=GA^*(n)\subset GP(n)$ стационарности точки A . Расслоение $G(X_m)$ содержит подрасслоение линейных реперов $L(X_m)$ с той же базой, типовым слоем которого является линейная группа $L=GL(n)$, действующая во множестве всех направлений, исходящих из точки A.

Рассмотрим формы

$$\widetilde{\omega}^I_J = \omega^I_J - \Gamma^I_{Ji}\omega^i, \quad \widetilde{\omega}_I = \omega_{IJ} - \Gamma_{Ji}\omega^i.$$

Дифференцируя их внешним образом и применяя теорему Картана-Лаптева [2,с.63], получим систему уравнений для компонент объекта $\Gamma = \{\Gamma^I_{Ji}, \Gamma_{Ii}\}$

$$\Delta\Gamma^I_{Ji} + \omega^I_{Ji} = \Gamma^I_{Jij}\omega^j, \quad \Delta\Gamma_{Ii} + \Gamma^J_{Ii}\omega_J = \Gamma_{Iij}\omega^j, \tag{4}$$

где, например,

$$\Delta\Gamma_{Ii} = d\Gamma_{Ii} - \Gamma_{Ji}\omega^J_I - \Gamma_{Ii}\overline{\omega}^j_i.$$

Объект Γ задает центропроективную связность в расслоении $G(X_m)$ и содержит подобъект линейной связности Γ^I_{Ji}, определяющий связность в подрасслоении $L(X_m)$. Формы центропроективной связности $\widetilde{\omega}^I_J$, $\widetilde{\omega}_I$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\widetilde{\omega}^I_J = \widetilde{\omega}^K_J \wedge \widetilde{\omega}^I_K + R^I_{Jij}\omega^i \wedge \omega^j, \quad d\widetilde{\omega}_I = \widetilde{\omega}^J_I \wedge \widetilde{\omega}_J + R_{Iij}\omega^i \wedge \omega^j,$$

где

$$R^I_{Jij} = \Gamma^I_{J[ij]} - \Gamma^K_{J[i}\Gamma^I_{Kj]}, \quad R_{Jij} = \Gamma_{I[ij]} - \Gamma^J_{I[i}\Gamma_{Jj]}. \tag{5}$$

компоненты объекта центропроективной кривизны $R=\{R^I_{Jij}, R_{Iij}\}$. Квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам в них. Продолжая уравнения (4) и альтернируя результат, получим

$$\Delta\Gamma^I_{J[ij]} + \Gamma^K_{J[i}\omega^I_{Kj]} + \Gamma^I_{K[j}\omega^K_{Ji]} \equiv 0, \quad \Delta\Gamma_{I[ij]} - \Gamma_{I[i}\omega^j_{Ij]} + \Gamma^J_{I[ij]}\omega_J \equiv 0,$$

откуда с помощью уравнений (4) и формул (5) найдем

$$\Delta R^I_{Jij} \equiv 0, \quad \Delta R_{Jij} + R^J_{Iij}\omega_J \equiv 0,$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i.

Теорема 1. Объект центропроективной кривизны R и подобъект линейной кривизны R^I_{Jij} являются псевдотензорами [3,с.46].

2. **Оснащение Бортолотти.** Произведем оснащение Бортолотти поверхности X_m , т.е. к каждой точке A поверхности присоединим гиперплоскость P_{n-1}, не проходящую через эту точку. Зададим эту гиперплоскость точками $B_I = A_I + \lambda_I A$, дифференцируя которые, получим

$$dB_I = \theta B_I + (\omega_I^J + \lambda_I \omega^J) B_J + (\Delta\lambda_I + \omega_I - \lambda_I \lambda_J \omega^J) A. \quad (6)$$

Откуда с учетом уравнений (1) вытекают условия инвариантности гиперплоскости P_{n-1}

$$\Delta\lambda_I + \omega_I = \lambda_{Ii}\omega^i. \quad (7)$$

Продолжая уравнения (7), найдем

$$\Delta\lambda_{Ii} - \lambda_J \omega^J_{Ii} = \lambda_{Iij}\omega^j \ (\lambda_{Iij} = \lambda_{Iji}).$$

Теорема 2. Оснащение Бортолотти поверхности X_m индуцирует центропроективные связности 2-х типов в ассоциированном расслоении $G(X_m)$.

Доказательство. Фундаментальный объект Λ^a_i и оснащающий квазитензор $\lambda_I = \{\lambda_i, \lambda_a\}$ охватывают компоненты объекта связности Г по формулам [4]

$$\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji} = -\delta^I_J \mu_i - \lambda_J(\delta^I_i + \delta^I_a \Lambda^a_i), \quad (8)$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{Ii} = \overset{0}{\Gamma}{}^J_{Ii}\lambda_J + \lambda_I \mu_i, \quad (9)$$

где введено обозначение $\mu_i = \lambda_i + \Lambda^a_i \lambda_a$. Коэффициенты μ_i удовлетворяют уравнениям $\Delta\mu_i + \omega_i + \Lambda^a_i \omega_a = \mu_{ij}\omega^j$. Объект $\overset{1}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}, \overset{1}{\Gamma}_{Ii}\}$ будем называть объектом связности 1-го типа. Компоненты Γ_{Ii} можно охватить с помощью продолженного оснащающего квазитензора $\{\lambda_{Ii}, \lambda_I\}$ и функций (8)

$$\overset{2}{\Gamma}_{Ii} = \overset{0}{\Gamma}{}^J_{Ii}\lambda_J + \lambda_{Ii}. \quad (10)$$

Получили объект связности 2-го типа $\overset{2}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}, \overset{2}{\Gamma}_{Ii}\}$.

Теорема 3. Связности 2-х типов совпадают тогда и только тогда, когда гиперплоскость Бортолотти неподвижна.

Доказательство. Подставляя соотношения

$$\lambda_{Ii} = \lambda_I \mu_i, \quad (11)$$

являющиеся аналитическими условиями совпадения 2-х типов охватов, в (6), убеждаемся в том, что P_{n-1} неподвижна. И обратно, при фиксации гиперплоскости, т.е. при выполнении равенств (11) охваты совпадают.

В силу теоремы 1 обращение кривизны R в нуль инвариантно, в этом случае из формул (5) получим

$$\Gamma^I_{J[ij]} = \Gamma^K_{J[i}\Gamma^I_{Kj]}, \quad \Gamma_{I[ij]} = \Gamma^J_{I[i}\Gamma_{Jj]}. \quad (12)$$

Однако, исходя из охватов (8-10) альтернированные пфаффовы производные $\Gamma^I_{J[ij]}$, $\Gamma_{I[ij]}$ компонент объекта Γ выражаются следующим образом:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^I_{J[ij]} = -\delta^I_J \mu_{[ij]} - \lambda_{J[i}(\delta^I_{j]} + \delta^I_a \Lambda^a_{j]}),$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{I[ij]} = \overset{0}{\Gamma}{}^J_{I[ij]} \lambda_J \quad \overset{2}{\Gamma}_{I[ij]} = \overset{0}{\Gamma}{}^J_{I[ij]} \lambda_J + \lambda_{J[j} \overset{0}{\Gamma}{}^J_{Ii]}. \tag{13}$$

Сравнивая полученные формулы (13) с (12), обнаруживаем, что выражения (12) имеют место (т.е. R=0) в случае выполнения (11). Если m=1, т.е. в случае кривой X_1, кривизна обращается в нуль без дополнительных условий. И обратно, в общем случае, т.е. если пфаффовы производные компонент Γ выражаются по формулам (13), кривизна не равна нулю. При выполнении условий (11) формулы (13) принимают вид (12) и R=0.

Теорема 4. Кривизна индуцированной центропроективной связности (1-го и 2-го типов) равна нулю тогда и только тогда, когда гиперплоскость Бортолотти неподвижна.

Замечение. В случае кривой, т.е. когда m=1, кривизна равна нулю без ограничений на смещение плоскости Бортолотти.

3. **Вырожденные параллельные перенесения**. Опишем параллельные перенесения оснащающей гиперплоскости в связностях обоих типов. Вводя в соотношения (7) формы связности $\tilde{\omega}^I_J$, $\tilde{\omega}_I$, получим $\nabla\lambda_I = \nabla_i\lambda_I\omega^i$, где ковариантный дифференциал $\nabla_i\lambda_I$ квазитензора λ_I относительно центропроективной связности имеют вид:

$$\nabla\lambda_I = d\lambda_I - \lambda_J\tilde{\omega}^J_I + \tilde{\omega}_I, \quad \nabla_i\lambda_I = \lambda_{Ii} + \lambda_J\Gamma^J_{Ii} - \Gamma_{Ii}.$$

Внешний дифференциал ковариантного дифференциала $\nabla\lambda_I$ приведем к виду:

$$d\nabla\lambda_I = -\nabla\lambda_J \wedge \tilde{\omega}^J_I + T_{Iij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{14}$$

где $T_{Iij} = R_{Iij} - \lambda_J R^J_{Iij}$. Коэффициенты T_{Iij} образуют псевдотензор, т.к. удовлетворяют сравнениям $\Delta T_{Iij} \equiv 0$. Равенства $T_{Iij}=0$ инвариантны. В этом случае дифференциальные уравнения $\Delta\lambda_I = 0$ вполне интегрируемы.

Линия ρ на поверхности задается уравнениями $\omega^i = \rho^i\omega$. Из структурных уравнений (14) следует, что система уравнений $\nabla\lambda_I /_\rho = 0$ вполне интегрируема.

Действуя оператором Δ на $\nabla_i\lambda_I$, получим

$$\Delta\nabla_i\lambda_I - \nabla_j\lambda_I\Lambda^a_i\omega^j_a \equiv 0,$$

т.е. ковариантные производные $\nabla_i\lambda_I$ составляют псевдотензор. В связности 1-го типа ковариантные производные объекта λ_I выражаются по формуле

$$\overset{1}{\nabla}_i \lambda_I = \lambda_{Ii} - \lambda_I\mu_i.$$

Равенства $\overset{1}{\nabla}_i \lambda_I = 0$ эквивалентны условиям (11). В связности 2-го типа ковариантные производные объекта λ_I обращаются в нуль, т.е. $\overset{2}{\nabla}_i \lambda_I = 0$, откуда

$d\lambda_I = \lambda_J \overset{0}{\varpi}{}^J_I - \overset{2}{\varpi}_I$. Следовательно, объект λ_I является инвариантным [5] относительно $\overset{2}{\Gamma}$. Внешнее дифференцирование определяющих его дифференциальных уравнений дает

$$(\overset{2}{R}_{Iij} - \lambda_J \overset{0}{R}{}^J_{Iij})\omega^i \wedge \omega^j = 0$$

или $\overset{2}{T}_{Iij}=0$.

Образуем в выражении для дифференциалов точек B_I ковариантные дифференциалы $\overset{1}{\nabla}\lambda_I$, $\overset{2}{\nabla}\lambda_I$ объекта λ_I относительно связностей 1-го и 2-го типа

$$dB_I = \theta B_I + (\omega_I^J + \lambda_I \omega^J)B_J + (\overset{1}{\nabla}\lambda_I + \overset{2}{\nabla}\lambda_J)A \ \ (\overset{2}{\nabla}\lambda_J = 0).$$

Определение. Будем говорить, что параллельное перенесение гиперплоскости P_{n-1}, состоящее в том, что она неподвижна (смещается произвольно в P_n) является вырожденным 1-го (2-го) типа.

Теорема 5. Параллельное перенесение гиперплоскости Бортолотти в связности $\overset{1}{\Gamma}(\overset{2}{\Gamma})$ является вырожденным 1-го (2-го) типа, причем в связности 2-го типа параллельное перенесение абсолютно, т.е. осуществляется вдоль любой линии ρ.

Работа выполнена по теме гранта Минобразования РФ (СПбКУ).

Библиографический список

1. *Golab S.* Tenzor calculas. Warshava, 1974. 371p.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. 248с.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащение голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. 82с.

4. *Шевченко Ю.И.* Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1977. N8. С.135-150.

5. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. Т.2. 1953. С.273-382.

K.V. P o l y a k o v a

DEGENERATE PARALLEL DISPLACEMENTS ALONG THE SURFACE OF THE PROJECTIVE SPACE

Surface of the projective space is considered as point manifold. Bortolotti′s equipment of the surface is made. It permits to give centerprojective connections of two types. Their coincidence conditions fix Bortolotti′s hyperplane. The conditions are necessary and sufficient ones for curvature pseudotensor of induced senterprojective

connection to be vanishing. There are discribed parallel displacements of Bortolotti′s hyperplane in the connections of the both types, which are degenerate.

УДК 514.76

THREE THEOREMS ON PROJECTIVE SUBMERSIONS

S. Stepanov, I. Tsyganok

(Vladimir State Pedagogical University)

Projective mappings have been extensively studied in the literature. The theory of projective submersions is less investigated (see for example [1] - [4]). This paper is devoted to study of the global theory and the local theory of projective submersions. In particular, we generalize two results from [2] and [4] to a noncompact Riemannian manifold.

1. Introduction

A *submersion* of an m-dimensional pseudo-Riemannian manifold (M, g) onto an n-dimensional (m > n) pseudo-Riemannian manifold (N, g′) is a C^∞ - surjective map π: (M, g) $\to$ (N, g′) such that at each point $x \in M$ the induced tangential map $\pi_{*x} : T_x M \to T_{\pi(x)} N$ is of maximal rank. The inverse image $\pi^{-1}(y)$ of a point $y \in N$ is said to be a *fibre* of π. For a submersion π: (M, g) $\to$ (N, g′), the implicit function theorem tells us that the fibres of π are closed submanifolds of (M, g) and at each point y of (N, g′) $\dim \pi^{-1}(y) = m - n$.

Let g^v denotes the metric of $\pi^{-1}(y)$ induced by g. If $\det (g^v) \neq 0$ then $\pi^{-1}(y)$ is called (see [5]) a *nondegenerate submanifold* of (M, g). Fibres of π which we discuss in this paper are assumed to be nondegenerate. Then a foliation V of (M, g) is given by $V = \{ \pi^{-1}(y) \mid y \in N \}$, which determines the *almost product structure*

$$TM = \ker \pi_* \oplus \ker \pi_*^{\perp}$$

where $\ker \pi_*$ will always be integrable and will be called the *vertical distribution* and $\ker \pi_*^{\perp}$ will be called the *horizontal distribution*.

Consider a curve $\gamma : J \to (M, g)$ in (M, g), where J is being an interval, and denote $\pi (\gamma) = \pi \circ \gamma : J \to (N, g')$ the image of γ by π. Then for each a curve γ which is tangent to the distribution $\ker \pi_*$ we have $\pi (\gamma)$ to be a point in (N, g′).

The curve γ is called *geodesic* if its tangent vector field $\dot\gamma$ is parallel, i. e. $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$ where ∇ denotes the Levi-Civita connection. That it follows (see [6]) that a geodesic is either regular at every point, or its image degenerates to a point. A