УДК 574.76

В. С. Малаховский

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
г. Калининград)

О ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ ОШИБКАХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО СИМВОЛА КРОНЕКЕРА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Дан анализ принципиальных ошибок, порожденных некорректным применением обобщенного символа Кронекера в дифференциально-геометрических исследованиях.

Ключевые слова: ковариантный дифференциал, обобщенный символ Кронекера, распределение, пфаффовы системы, относительная инвариантность, правильная продолжаемость.

§1. Что такое «обобщенный символ Кронекера»?

Введенный в XIX в. символ Кронекера

$$\delta_J^K = \begin{cases} 0, \text{ если } J \neq K, \\ 1, \text{ если } J = K \end{cases} \quad \left(I, J, K = \overline{1, n}\right) \tag{1.1}$$

стал широко использоваться в различных областях математики. Особую роль он играет в дифференциально-геометрических исследованиях. Являясь аффинором, этот символ позволяет геометрам не только упрощать записи формул и дифференциальных уравнений, но и осуществлять операции, приводящие к появлению новых геометрических объектов. Как следует из формул (1.1), в символе Кронекера δ_J^K верхний и нижний индексы пробегают одинаковые подмножества натуральных чисел.

Однако в начале XXI в. появился цикл научных публикаций, в которых использовались символы Кронекера с верхним и нижним индексами, когда значения индексов одного уровня охватывают значения индексов другого уровня, но не наоборот. Именно такие системы величин

$$\delta^i_J,\ \delta^\alpha_J,\ \delta^J_i,\ \delta^J_\alpha \tag{1.2}$$

$$\left(i,j,k=\overline{1,m};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n};\ I,J,K=\overline{1,n};\ m<n\right)$$

стали называть *обобщенными символами Кронекера*. Каждый математик вправе вводить любые новые понятия, не противоречащие логике. Однако при осуществлении общепринятых дифференциально-геометрических операций (в частности, тензорных) необходимо учитывать, что системы величин δ^i_α, δ^α_i — это просто совокупность нулей, составляющих безындексный объект $\{0\}$.

К сожалению, используя в научных публикациях обобщенные символы Кронекера, авторы ряда работ не учитывают, что искусственное присоединение нулей в принципе не может повлиять на характер исследования, осуществляемого корректно.

Даже простейшие примеры показывают, что формальное присоединение нулей порождает «новые» системы величин, которые в действительности являются величинами исходной системы и системой нулей:

$$A_J=a_i\delta^i_J,\ B_J=b_\alpha\delta^\alpha_J \leftrightarrow A_j=a_i\delta^i_j=a_j;\ A_\alpha=a_i\delta^i_\alpha=0;$$

$$B_i=b_\alpha\delta^\alpha_i=0;\ B_\beta=b_\alpha\delta^\alpha_\beta=b_\beta. \tag{1.3}$$

§2. О двух принципиальных ошибках при использовании обобщенных символов Кронекера

Среди принципиальных ошибок, возникающих при некорректном применении обобщенных символов Кронекера в дифференциальной геометрии, наибольшее опасение вызывают две.

1. Использование обобщенного символа Кронекера в уравнениях структуры.

2. Задание ковариантных дифференциалов обобщенных символов Кронекера, являющихся тождественными нулями, ненулевыми линейными комбинациями компонент деривационных формул репера.

Эти принципиальные ошибки обусловливают некорректность результатов научных исследований и порождают теории на пустом множестве.

Рассмотрим конкретные примеры, иллюстрирующие некорректное использование обобщенного символа Кронекера в указанных случаях.

В работе [8] обобщенные символы Кронекера используются при задании уравнений структуры (формулы (8, 9)), применение которых к системам пфаффовых уравнений (формулы (6) на с. 151 и (21) на с. 155) приводит к системам квадратичных уравнений, не разрешаемых по лемме Картана:

$$\begin{aligned}
&(6){:}\ \omega_i \wedge \left(\omega_K^\alpha - \delta_K^\beta \omega_\beta^\alpha\right) + \Theta_{iKL}^\alpha \wedge \omega^L = 0,\\
&(21_1){:}\ \omega_\alpha^i \wedge \left(\omega_K^\alpha - \delta_K^\beta \omega_\beta^\alpha\right) + \Theta_{KL}^i \wedge \omega^L = 0,\\
&(21_2){:}\ \delta_j^i \delta_K^\alpha \omega_\alpha^k \wedge \omega_k + \Theta_{jKL}^i \wedge \omega^L = 0,\\
&(21_3){:}\ \delta_K^\alpha \omega_i \wedge \omega_\alpha + \Theta_{iKL} \wedge \omega^L = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Значит, системы (6) и (21) не являются правильно продолжаемыми.

В работах [5—8] используются уравнения

$$\Delta\delta_J^i + \delta_J^\alpha \omega_\alpha^i = 0, \ \ \Delta\delta_J^\alpha = -\delta_J^k \Lambda_{kK}^\alpha \omega^K , \tag{2.2}$$

называемые автором «уравнениями для обобщенных символов Кронекера δ_J^i, δ_J^α» [8, с. 155]. Здесь и в дальнейшем Δ — символ ковариантного дифференцирования.

Как же выводит автор эти уравнения? На страницах 154—155 [8] сказано: «Предварительно из очевидного равенства $\Delta\delta_J^I = 0$ с учетом уравнений (4) (т.е. уравнений $\omega_i^\alpha = \Lambda_{iJ}^\alpha \omega^J$)

распределения S_n получим уравнения для обобщенных символов Кронекера δ^i_J, δ^α_J » (т. е. уравнения (2.2)). Однако

$$\Delta\delta^I_J \overset{def}{=} d\delta^I_J - \delta^I_K\omega^K_J + \delta^K_J\,\omega^I_K = -\omega^I_J + \omega^I_J \equiv 0 \tag{2.3}$$

не уравнения, а тождества. В тождествах же подстановка вместо индекса I индексов i и α снова приводит к тождествам:

$$\begin{gathered}\Delta\delta^i_J = d\delta^i_J - \delta^i_K\omega^K_J + \delta^K_J\,\omega^i_K = \\ = -\delta^i_j\omega^j_J - \delta^i_\alpha\omega^\alpha_J + \delta^K_J\,\omega^i_K = -\omega^i_J + \omega^i_J \equiv 0, \\ \Delta\delta^\alpha_J = d\delta^\alpha_J - \delta^\alpha_K\omega^K_J + \delta^K_J\,\omega^\alpha_K = \\ = -\delta^\alpha_i\,\omega^i_J - \delta^\alpha_\beta\omega^\beta_J + \delta^K_J\,\omega^\alpha_K = -\omega^\alpha_J + \omega^\alpha_J \equiv 0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Следовательно, автор постулирует для символов $\Delta\delta^i_J$, $\Delta\delta^\alpha_J$ классическое правило ковариантного дифференцирования:

$$\begin{gathered}\Delta\delta^i_J = d\delta^i_J - \delta^i_K\omega^K_J + \delta^j_J\omega^i_j = \\ = -\delta^i_j\omega^j_J - \delta^i_\alpha\omega^\alpha_J + \delta^j_J\omega^i_j = -\omega^i_J + \delta^j_J\omega^i_j, \\ \Delta\delta^\alpha_J = d\delta^\alpha_J - \delta^\alpha_K\omega^K_J + \delta^K_J\,\omega^\alpha_K = \\ = -\delta^\alpha_i\,\omega^i_J - \delta^\alpha_\beta\omega^\beta_J + \delta^\beta_J\omega^\alpha_\beta = -\omega^\alpha_J + \delta^\beta_J\omega^\alpha_\beta.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Однако такое постулирование неприменимо к обобщенным символам Кронекера, так как совокупность нулей δ^i_α, δ^α_j, формально записанных в виде величин, снабженных нижними и верхними индексами, являются фактически безындексными объектами-нулями и их в принципе нельзя использовать как величины, снабженные индексами, при записи ковариантных дифференциалов по классическому правилу. Полагая в символах Δa^i_J, Δa^α_J вместо индекса J составляющие его индексы k и β, получим:

$$\Delta\delta^i_k = -\omega^i_k + \omega^i_k \equiv 0; \;\; \Delta\delta^i_\beta = \Delta 0 \overset{def}{=} d0 \equiv 0;$$
$$\Delta\delta^\alpha_k = \Delta 0 \overset{def}{=} d0 \equiv 0; \;\; \Delta\delta^\alpha_\beta = -\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\beta \equiv 0. \tag{2.6}$$

Следовательно,

$$\Delta\delta^i_J \equiv 0, \;\; \Delta\delta^\alpha_J \equiv 0. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.2), получим:

$$\omega^i_\beta = 0, \;\; \Lambda^\alpha_{iK} = 0 \to \;\; \omega^\alpha_i = 0 \tag{2.8}$$

— противоречие, так как в распределении S_n плоскости $(A, A_1, ..., A_m)$ и $(A_{m+1}, ..., A_n)$ не могут быть стационарными.

К сожалению, аргументированные доказательства (см. [2; 4]) невозможности использования в дифференциально-геометрических исследованиях формул (2.2) проигнорированы автором в работе [8].

Из изложенного вытекает, что использование обобщенных символов Кронекера в уравнениях структуры и замена ковариантных дифференциалов этих символов, являющихся тождественными нулями, на ненулевые линейные комбинации форм ω^i_α и ω^α_k по формулам (2.2) приводят к принципиальным ошибкам, сводящим результаты исследований к теориям «на пустом множестве».

Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Правильная продолжаемость системы пфаффовых уравнений вырожденных многообразий оснащенных и индуцирующих фигур //Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 40. Калининград, 2009. С. 84—94.

2. *Малаховский В.С.* Об особенностях применения ковариантного дифференцирования к обобщенным символам Кронекера //Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 41. Калининград, 2010. С. 85—87.

3. *Малаховский В.С.* Относительно инвариантные системы пфаффовых форм — необходимое условие корректности дифференциально-геомтерических исследований // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 41. Калининград, 2010. С. 88—97.

4. *Столяров А. В.* Замечания к применению в научных исследованиях дифференциалов обобщенных символов Кронекера //Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 36. Калининград, 2010. С.144—145.

5. *Шевченко Ю. И.* Нормальная аффинная связность Столярова, ассоциированная с распределением плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 39. Калининград, 2008. С. 157—166.

6. *Шевченко Ю. И.* Плоскостная аффинная связность Столярова, ассоциированная с распределением. // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 40. Калининград, 2009. С.152—160.

7. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве: учебное пособие. Калининград, 2009.

8. *Шевченко Ю. И.* Проективная связность Лаптева — Остиану, ассоциированная с распределением плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 41. Калининград, 2010. С. 150—165.

V. Malakhovsky

ABOUT MISTAKES IN PRINCIPLE BYUSING
GENERALIZED KRONECKER SYMBOLS
IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

Two mistakes in principle in scientific works using generalized Kronecker symbols and its covariant differentials are analyzed.

УДК 514.75

К. В. Петешов

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ДЕЙСТВИЕ ТЕНЗОРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПОДОБЪЕКТАХ

В проективном пространстве рассмотрены дифференциальные уравнения компонент символа Кронекера и дифференциальные сравнения для компонент квази-