ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Л. С. Нечитайлова

ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ n-ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВА V_n В СЕБЯ

В статье перечислены τ-членные группы Ли ($\tau = 2,3,4$), которые могут быть группами движений n-ортогональной системы в себя и указан вид ряда получаемых при этом метрик риманова пространства.

Координатная система (x^α) в некоторой области риманова пространства V_n (произвольной сигнатуры) называется n-ортогональной системой, если в этой координатной системе матрица фундаментального тензора имеет диагональный вид

$$g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta \ (g_{\alpha\alpha} \neq 0 \text{ для всех } \alpha = \overline{1,n}). \qquad (1)$$

Векторное поле ξ^α определяет инфинитезимальное преобразование:

$$x^\alpha \longrightarrow x^{\alpha'} = x^\alpha + t\xi^\alpha. \qquad (2)$$

ξ^α есть инфинитезимальное преобразование, сохраняющее n-ортогональность системы, если выполнено условие

$$(L_\xi g)_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta. \qquad (3)$$

Всякое инфинитезимальное движение или конформное преобразование есть частный случай инфинитезимального преобразования n-ортогональной системы.

Здесь мы рассмотрим движения n-ортогональной системы в себя.

Для того, чтобы инфинитезимальное преобразование (2) было движением, необходимо, чтобы

$$(L_\xi g)_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \forall \alpha, \beta. \qquad (4)$$

В случае пространства с метрикой (1) уравнения (4) имеют вид:

$$g_{\alpha\alpha}\xi^\alpha_\beta + g_{\beta\beta}\xi^\beta_\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \qquad (5)$$

$$\xi^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\gamma} + 2g_{\alpha\alpha}\xi^\alpha_\alpha = 0, \qquad (6)$$

где $\xi^\alpha_\beta = \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}$, в (5) суммирования по α, β нет.

Безотносительно к метрике g на поле ξ^α накладывается условие:

$$\xi^\alpha_\beta \xi^\beta_\gamma \xi^\gamma_\alpha + \xi^\beta_\alpha \xi^\alpha_\gamma \xi^\gamma_\beta = 0 \ (\forall \alpha, \beta, \gamma;\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha). \qquad (7)$$

Координатная система преобразуется в себя, если

$$\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^\alpha).$$

Из уравнений движения (2) видно, что в этом случае $\xi^\alpha(x) = \xi^\alpha(x^\alpha)$, то есть зависит только от соответствующего x^α. Тогда уравнения (5) и (7) выполняются тривиальным образом.

Будем считать, не нарушая общности, что вектор Киллинга лежит в p-мерной координатной площадке ($1 \leq p \leq n$), то есть имеет вид:

$$\{\xi^1(x), \ldots, \xi^p(x), 0, \ldots, 0\}. \qquad (8)$$

В случае преобразования системы в себя мы можем привести ненулевые компоненты вектора Киллинга к постоянным величинам, а именно сделаем их равными единице, то есть положим

$$\vec{\xi} = \{1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}. \qquad (9)$$

Тогда метрика будет иметь вид:

$$ds^2=\sum_{\alpha=1}^{n} g_{\alpha\alpha}(x^2-x^1,\dots,x^p-x^1;\,x^a)\quad (a=\overline{p+1,n}). \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда n-ортогональная система допускает r-членную группу движений в себя $(r\geq 2)$. В данной статье исследованы группы до $r=4$.

Используем классификацию в форме, данной в книге А.З.Петрова "Пространства Эйнштейна". Исследование уравнений структуры $[X_iX_j]=C_{ij}^{\alpha}X_{\alpha}$ группы Ли показывает, что из указанных групп лишь следующие являются группами движения системы в себя:

$r=2$

$\underline{\mathrm{I}}$ $[X_1X_2]=0$ – абелева G_2,

$\underline{\mathrm{II}}$ $[X_1X_2]=X_1$.

$r=3$

$\underline{\mathrm{I}}$ $[X_iX_j]=0$ $(i,j=1,2,3)$ – абелева G_3,

$\underline{\mathrm{III}}$ $[X_1X_2]=0,\ [X_2X_3]=0,\ [X_3X_1]=-X_1$,

$\underline{\mathrm{V}}$ $[X_1X_2]=0,\ [X_2X_3]=X_2,\ [X_3X_1]=-X_1$,

$\underline{\mathrm{VI}}$ $[X_1X_2]=0,\ [X_2X_3]=qX_2,\ [X_3X_1]=-X_1$ $(q\neq 0,1)$,

$\underline{\mathrm{VIII}}$ $[X_1X_2]=X_1,\ [X_2X_3]=X_3,\ [X_3X_1]=-2X_2$.

$r=4$

$\underline{\mathrm{IV}}$ $[X_1X_2]=0,\ [X_2X_3]=X_2,\ [X_3X_1]=0,$

$[X_1X_4]=X_1,\ [X_2X_4]=0,\ [X_3X_4]=0,$

$\underline{\mathrm{VI}}_1$ $[X_iX_j]=0$ $(i,j=1,2,3)$,

$[X_1X_4]=aX_1+bX_4,\ [X_2X_4]=cX_2+dX_4,\ [X_3X_4]=eX_3+fX_4,$

$\underline{\mathrm{VII}}$ $[X_1X_2]=X_1,\ [X_2X_3]=X_3,\ [X_3X_1]=-2X_2,\ [X_iX_4]=0$ $(i=1,2,3)$.

Соответствующие метрики могут быть найдены. Приведем некоторые из них. $(\Phi_\alpha=\ln|g_{\alpha\alpha}|)$.

$r=2$. $\underline{\mathrm{II}}$ $\Phi_i=-2x^{p+1}+\Psi_i(u^j,v^k,x^l)$ $(i=\overline{1,p})$,

$\Phi_a=\Psi_a(u^j,v^k,x^l)$ $(a=\overline{p+1,n})$,

$u^j=x^j-x^1-\exp x^{p+1},\quad v^k=x^k-x^{p+1},$

$(j=\overline{2,p};\ k=\overline{p+1,p+q},\ l=\overline{p+q+1,n})$.

$r=3$. $\underline{\mathrm{III}}$ $\Phi_i=-2\ln(x^2-x^1)+\Psi_i(u^j,v^k,w^l,x^m)$ $(i=\overline{1,p})$,

$\Phi_a=\Psi_a(u^j,v^k,w^l,x^m)$ $(a=\overline{p+1,n})$

$$u^j=\frac{x^j-x^1}{x^2-x^1},\quad v^k=-\ln(x^2-x^1)+\frac{1}{b^k-b^{p+1}}(x^k-x^{p+1}),$$

$w^l=\ln(x^2-x^1)-x^l$

$(j=\overline{3,p};\ k=\overline{p+2,p+q};\ l=\overline{p+q+1,p+q+s};\ m=\overline{p+q+s+1,n})$,

$b^k,b^{p+1}=\mathrm{const},\ b^k\neq b^{p+1}$ $(v^k=x^k-x^{p+1},\ b^k=b^{p+1})$.

$$\underline{\mathrm{VIII}}.\quad \Phi_1=2\ln\frac{x_3-x_2}{(x_3-x_1)(x_2-x_1)}+\Psi_1(u^j,x^k),$$

$$\Phi_2=2\ln\frac{x_3-x_1}{(x_3-x_2)(x_2-x_1)}+\Psi_2(u^j,x^k),$$

$$\Phi_i=2\ln\frac{x_2-x_1}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)}+\Psi_i(u^j,x^k)\quad (i=\overline{3,p}),$$

$$\Phi_a=\Psi_a(u^j,x^k)\quad (a=\overline{p+1,n}),$$

$$u^j=\frac{(x^j-x^2)(x^3-x^1)}{(x^j-x^1)(x^3-x^2)}\qquad (j=\overline{4,p};\ k=\overline{p+1,n}).$$

7 Зак. 3728

$$\tau = 4.\ \overline{\mathrm{VI}}_1\quad \Phi_1 = -2\ln\left[\exp(x_1 - x_2) - 1\right] + \psi_1(u^j, v^k, w^\ell, y^m, x^t),$$

$$\Phi_2 = -2\ln\left[\exp(x_i - x_1) - 1\right] + \psi_i(u^j, v^k, w^\ell, y^m, x^t),$$

$$\Phi_a = \psi_a(u^j, v^k, w^\ell, y^m, x^t),$$

$$(i = \overline{1,p};\ a = \overline{p+1,n}),$$

$$u^j = \frac{\exp(x^1 - x^j) - 1}{\exp(x^1 - x^2) - 1},$$

$$v^k = (x^k - a^k x^{p+q+1}) - (b^k - b^{p+q+1})x^{p+q+s+1},$$

$$w^\ell = (x^\ell - x^{p+q+1}) - (b^\ell - b^{p+q+1})x^{p+q+s+1},$$

$$y^m = x^m - x^{p+q+s+1}$$

$$(j = \overline{3,p};\ k = \overline{p+1,p+q};\ \ell = \overline{p+q+2,p+q+s};$$
$$m = \overline{p+q+s+2,\ p+q+s+\tau};\ t = \overline{p+q+s+\tau+1,n}).$$

$$a^k, b^k, b^\ell, b^{p+q+1} = \mathrm{const}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Н.Д.Поляков

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ Γ НА МНОГООБРАЗИИ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ

1.Пусть задано нечетномерное дифференцируемое многообразие M_{n+1} $(n = 2q)$,в котором введена локальная система координат.Рассмотрим некоторую координатную окрестность U и обозначим координаты текущей точки через $y^{\mathcal{J}}$.Введем вполне интегрируемую систему $(n+1)$ -линейно независимых форм Пфаффа $\omega^{\mathcal{J}}$,первыми интегралами которой являются координаты $y^{\mathcal{J}}$

$$(\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Г.Ф.Лаптев показал [2],что над окрестностью U возможно построить бесконечную последовательность линейных линейно независимых форм $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}, \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2}, \ldots$,симметричных по нижним индексам и имеющих расслоенную структуру к базовым формам $\omega^{\mathcal{J}}$ [2].Эти формы подчинены структурным уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}},\\
&\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = \omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} + \omega^{\mathcal{L}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}},\\
&\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2} = \omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} + \omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}_1} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}\mathcal{K}_2} + \omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}_2} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}\mathcal{K}_1} +\\
&\qquad + \omega^{\mathcal{L}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\mathcal{L}},
\end{aligned} \tag{1}$$

. . . .