УДК 514.75

М. В. Кретов [1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
Kretov1@mail.ru

Комплексы гиперболических параболоидов

В трехмерном аффинном пространстве исследуются комплексы (трехпараметрические семейства) $ГП_3$ гиперболических параболоидов. Получены геометрические свойства одного из подклассов рассматриваемого многообразия фигур.

Ключевые слова: гиперболический параболоид, аффинное пространство, конгруэнция, комплекс, многообразие, репер, система уравнений Пфаффа, характеристическое многообразие, фокальное многообразие, индикатриса вектора.

Отнесем комплекс $ГП_3$ гиперболических параболоидов к реперу $R = \{A, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, который характеризуется следующим образом: A — вершина гиперболического параболоида [1], векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ сопряжены и лежат в главной плоскости образующего элемента, вектор $\overline{e}_3$ направлен по оси параболоида, конец P вектора $\overline{e}_1 + \overline{e}_2$ лежит на гиперболическом параболоиде. При этом уравнение гиперболического параболоида q согласно [1] будет иметь вид

$$\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - x^3 = 0. \quad (1)$$

Поступила в редакцию 30.01.2018 г.

Принимая формы $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ за независимые первичные, согласно [2] запишем систему уравнений Пфаффа многообразия $\Gamma\Pi_3$ в виде

$$\omega_i^i = \Gamma_{ij}^i \omega^j,\ \omega_3^1 = \Gamma_{3j}^1 \omega^j,\ \omega_1^3 = \Gamma_{1j}^3 \omega^j,$$

$$\omega_2^3 = \Gamma_{2j}^3 \omega^j,\ \omega_3^2 = \Gamma_{3j}^2 \omega^j,\ \omega_2^1 - \omega_1^2 = \Gamma_{2j}^1 \omega^j, \qquad (2)$$

где i, j, k, ... = 1, 2, 3 (по i не суммировать!).

Определение 1. *Комплексом* $\hat{\Gamma\Pi}_3$ *гиперболических параболоидов* назовем комплекс $\Gamma\Pi_3$, если индикатрисы векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ неподвижны, а координатный вектор $\bar{e}_3$ описывает линии с касательными, параллельными ему.

Теорема 1. *Многообразия* $\hat{\Gamma\Pi}_3$ *существуют и определяются с произволом одной функции трех аргументов.*

Для комплекса $\hat{\Gamma\Pi}_3$ имеем

$$dA = \omega^1 \bar{e}_1 + \omega^2 \bar{e}_2 + \omega^3 \bar{e}_3, \quad d\bar{e}_1 = d\bar{e}_2 = 0,\ d\bar{e}_3 = \omega_3^3 \bar{e}_3.$$

Так как $d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j$, то

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = 0.$$

Обозначим $\Gamma_{31}^3 = \alpha$, $\Gamma_{32}^3 = \beta$, $\Gamma_{33}^3 = \gamma$, тогда система уравнений комплекса $\hat{\Gamma\Pi}_3$ гиперболических параболоидов запишется в виде

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = 0,$$

$$\omega_3^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3. \qquad (3)$$

Исследуя систему уравнений (3) согласно [3], убеждаемся в том, что комплексы $\hat{\Gamma\Pi}_3$ гиперболических параболоидов существуют и определяются с произволом одной функции трех аргументов.

Обозначим через A_i — концы векторов $\overline{e}_i$, M_i — текущие точки координатных прямых $(A, \overline{e}_i)$, а через M_{3+i} — текущие точки соответственно координатных плоскостей $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$, $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_3)$ и $(A, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$. Из системы уравнений (3) и деривационных формул репера R следует, что

$$dA_1 = \omega^1 \overline{e}_1 + \omega^2 \overline{e}_2 + \omega^3 \overline{e}_3, \quad dA_2 = \omega^1 \overline{e}_1 + \omega^2 \overline{e}_2 + \omega^3 \overline{e}_3,$$
$$dA_3 = \omega^1 \overline{e}_1 + \omega^2 \overline{e}_2 + \left(\alpha\omega^1 + \beta\omega^2 + (1+\gamma)\omega^3\right)\overline{e}_3,$$
$$dM_1 = \omega^2 \overline{e}_2 + \omega^3 \overline{e}_3, \quad dM_2 = \omega^1 \overline{e}_1 + \omega^3 \overline{e}_3, \tag{4}$$
$$dM_3 = \omega^1 \overline{e}_1 + \omega^2 \overline{e}_2, \quad dM_4 = \omega^3 \overline{e}_3,$$
$$dM_5 = \omega^2 \overline{e}_2, \quad dM_6 = \omega^1 \overline{e}_1.$$

Анализируя формулы (4), получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Комплексы* $\hat{\Gamma\Pi}_3$ *обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) *точки координатных прямых* $(A, \overline{e}_i)$ *описывают конгруэнции плоскостей, параллельных координатным плоскостям* $(A, \overline{e}_{i+1}, \overline{e}_{i+2})$, *где* $\overline{e}_{i+3} \overset{def}{=} \overline{e}_i$;

2) *точки координатных плоскостей* $(A, \overline{e}_i, \overline{e}_j)$, $i \neq j$, *описывают линии с касательными, параллельными координатным векторам* $\overline{e}_k$ $(k \neq i \neq j)$, $\overline{e}_{i+3} \overset{def}{=} \overline{e}_i$.

Для исследуемого трехпараметрического семейства гиперболических параболоидов по методике, изложенной в работах [4; 5], легко найти характеристическое и фокальное многообразия образующего элемента.

Теорема 3. *Характеристическое многообразие гиперболического параболоида, описывающего комплекс* $\hat{\Gamma\Pi}_3$, *состоит из одной точки* N *с координатами* $-\dfrac{\alpha}{2\gamma}$, $\dfrac{\beta}{2\gamma}$ *и* $-\dfrac{1}{\gamma}$.

Доказательство следует из системы уравнений

$$-2x^1 + \alpha x^3 = 0\,, \quad 2x^2 + \beta x^3 = 0\,, \quad 1 + \gamma x^3 = 0\,.$$

Замечание. Если координаты точки N удовлетворяют уравнению $\alpha^2 - \beta^2 + 4\gamma = 0$, то фокальное многообразие [4] гиперболического параболоида состоит из этой точки, в противном случае фокальное многообразие образующего элемента является пустым.

Список литературы

1. *Комиссарук А.М.* Аффинная геометрия. Минск, 1977.

2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

4. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в *n*-мерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1974. Вып. 6. С. 113—133.

5. *Кретов М.В.* Комплексы конусов // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 45—49.

M. Kretov[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo ul., Kaliningrad, 236016, Russia
Kretov1@mail.ru

Complexes of hyperbolic paraboloids

Submitted on January 30, 2018

In a three-dimensional affine space, complexes (three-parameter families) of hyperbolic paraboloids are studied. Geometric properties of one of the subclasses of the considered variety of figures are obtained.

Keywords: hyperbolic paraboloid, affine space, congruence, complex, manifold, frame, Pfaffian system of equations, characteristic manifold, focal variety, indicatrix of a vector.

References

1. *Komissaruk, A. M.:* Affine geometry. Minsk (1977) (in Russian).

2. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs. GITTL, Moscow. **2**, 275—382 (1953) (in Russian).

3. *Malakhovsky, V. S.:* Introduction to the theory of external forms. Kaliningrad (1978) (in Russian).

4. *Malakhovsky, V., Makhorkin, V.:* Differential geometry of varieties of hyperquadrics in *n*-dimensional projective space. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 6, 113—133 (1974) (in Russian).

5. *Kretov, M. V.* Complexes of cones. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 43, 45—49 (2012) (in Russian).