$$F_5\left(-\frac{\eta+e\sqrt{e^2+\eta^2-1}}{e^2+\eta^2};\ -\frac{e+\sqrt{\eta^2(e^2+\eta^2-1)}}{e^2+\eta^2};\ 0\right),$$

$$F_6\left(-\frac{\eta-e\sqrt{e^2+\eta^2-1}}{e^2+\eta^2};\ -\frac{e-\sqrt{\eta(e^2+\eta^2-1)}}{e^2+\eta^2};\ 0\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения координат фокусов имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^1)^2+(x^2)^2=1, \quad x^3=0, \\ x^1x^2(x^1\eta+ex^2+1)=0. \end{cases} \tag{12}$$

Из (12) непосредственно следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 6. Поверхность (A) пары T'' является торсом, её касательная плоскость совпадает с плоскостью эллипса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (A) пары T'' принимает вид: $(\omega^2)^2=0$. Следовательно, поверхность (A) -торс. Так как $(d\bar{A}\,\bar{e},\bar{e}_2)=0$, то плоскость эллипса C является касательной плоскостью.

Л и т е р а т у р а

1. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геом. семинара № 2 Москва, 1969.

2. Липатова Ф.А., Конгруэнции пар фигур в трехмерном аффинном пространстве, образованные эллипсом и точкой. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. I, Тр. Калининградского ун-та,

3. Липатова Ф.А., Об одном классе конгруэнций пар фигур, порожденных эллипсом и точкой. Тр. Калининградского ун-та, вып. 2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

М А Л А Х О В С К И Й В.С.

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР ФИГУР В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются вырожденные многообразия пар фигур. Дана классификация вырожденных конгруэнций линейных и квадратичных пар. Исследованы вырожденные пары конгруэнций, порожденные точками.

§ I. Общая характеристика вырожденных пар фигур.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 m-мерное многообразие простых неинцидентных пар фигур $F=[F_1,F_2]$ где $m<\min(N_1,N_2)$, N_i $(i=1,2)$ -ранг фигуры F_i (см. I, §8). Обозначим буквой h_i размерность многообразия (F_i), образованного фигурой F_i. Не умаляя общности, можно считать, что

$$h_1 \geq h_2 \tag{1.1}$$

О п р е д е л е н и е I. Многообразие $\mathfrak{M}_m$ называется невырожденным, если $h_1=h_2=m$, многообразие $\mathfrak{M}_m$ называется вырожденным многообразием первого рода, если $h_1 = m$, $0 \leq h_2 < m$; многообразие $\mathfrak{M}_m$ называется вырожденным многообразием второго рода, если $h_1 < m$, $h_2 < m$.

Вырожденное многообразие первого рода характеризуется дифференцируемым отображением f многообразия (F_1) на многообразие (F_2), переводящим фигуру F_1 в ту фигуру F_2, которая вместе с F_1 образует пару $[F_1, F_2]$. Такие многообразия мы будем обозначать символом $(F_1, F_2)_{mh_2}$.

Если задано многообразие $(F_1 F_2)_{mh_2}$, то определено расслоение многообразия (F_1) фигур F_1 на h_2-параметрическое семейство $(m-h_2)$-мерных подмногообразий.

§ 2. Классификация вырожденных конгруэнций линейных и квадратичных пар.

Пара $[F_1, F_2]$ фигур F_1, F_2 называется линейной, если F_i, $(i = 1,2)$ – точка, прямая или плоскость, пара $[F_1, F_2]$ называется квадратичной (сравни [2]), если F_1 -квадратичное многообразие (коника или квадрика), а F_2 -точка, прямая, плоскость или квадратичное многообразие.

Введем для фигур, входящих в линейные и квадратичные пары, специальные обозначения. Точки будем обозначать буквами P, P^*, прямые-буквами $\mathcal{L}, \mathcal{L}^*$, плоскости-буквами p, p^*, коники-буквами C, C^*, квадрики-буквами Q, Q^*.

В пространстве P_3 существуют следующие различные типы вырожденных конгруэнций линейных и квадратичных пар:

$(PP^*)_{2,1}$, $(P\mathcal{L})_{2,1}$, $(\mathcal{L}P)_{2,1}$, $(Pp)_{2,1}$, $(\mathcal{L}\mathcal{L}^*)_{2,1}$,

$(pP)_{2,1}$, $(PC)_{2,1}$, $(\mathcal{L}p)_{2,1}$, $(p\mathcal{L})_{2,1}$, $(CP)_{2,1}$,

$(PQ)_{2,1}$, $(\mathcal{L}C)_{2,1}$, $(p, p^*)_{2,1}$, $(Cp)_{2,1}$, $(QP)_{2,1}$,

$(\mathcal{L}Q)_{2,1}$, $(pC)_{2,1}$, $(Cp)_{2,1}$, $(Q\mathcal{L})_{2,1}$, $(pQ)_{2,1}$,

$(CC^*)_{2,1}$, $(Qp)_{2,1}$, $(CQ)_{2,1}$, $(QC)_{2,1}$, $(QQ^*)_{2,1}$.

§3. Конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$.

Рассмотрим многообразие $(PP^*)_{2,1}$. Каждой точке P поверхности (P) соответствует единственная точка P^* линии (P^*), а точке P^* соответствует на поверхности (P) однопараметрическое семейство Γ_{P^*} точек P -линия.

Совместим вершину A_0 тетраэдра $\{\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\}$ с точкой P, вершину A_3 – с точкой P^*, вершину A_1 – с точкой пересечения касательной плоскости к поверхности (P) в точке P с касательной к линии (P^*) в точке P^*, вершину A_2 – с точкой пересечения касательной плоскости к поверхности (A_1) с касательной к линии Γ_{P^*} в точке P. Матрица деривационных формул построенного канонического репера приводится к виду:

$$\begin{bmatrix} \theta_0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \theta_1 & \omega^1 & \alpha\omega^1 + \omega^2 \\ \tau\omega^1 & p\omega^1 + q\omega^2 & \theta_2 & \omega^1 + \beta\omega^2 \\ 0 & \omega^1 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

где
$$\omega^1=\omega_0^1, \qquad \omega^2=\omega_0^2, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
\theta_0&=\tfrac{1}{4}\left\{(2s+u)\omega^1+(v-2p)\omega^2\right\},\\
\theta_1&=\tfrac{1}{12}\left\{(2s-4t-u)\omega^1+(2p-v)\omega^2\right\},\\
\theta_2&=\tfrac{1}{12}\left\{(4t-2s-5u)\omega^1-(2p+5v)\omega^2\right\},\\
\theta_3&=-\tfrac{1}{4}\left\{(2s-u)\omega^1-(v+2p)\omega^2\right\}.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$ имеет вид.

$$\begin{aligned}
&\omega_0^3=0,\quad \omega_3^0=0,\quad \omega_3^2=0,\quad \omega_3^1=\omega^1,\\
&\omega_1^0=0,\quad \omega_1^2=\omega^1,\quad \omega_1^3=\alpha\omega^1+\omega^2,\\
&\omega_2^0=\tau\omega^1,\quad \omega_2^1=p\omega^1+q\omega^2,\\
&\omega_2^3=\omega^1+\beta\omega^2,\\
&\omega_0^0-\omega_3^3=s\omega^1-p\omega^2,\\
&\omega_0^0+\omega_2^2-2\omega_1^1=t\omega^1-p\omega^2,\\
&\omega_0^0+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=u\omega^1+v\omega^2.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Замыкая (3.4), получим:

$$d\alpha\wedge\omega^1+\left[u-\beta-\tfrac{2}{3}\alpha(p+v)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$\begin{aligned}
&d\beta\wedge\omega^2+\left[\alpha q-v-2p+\tfrac{1}{3}\beta(s+4u-2t)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&dp\wedge\omega^1+dq\wedge\omega^2+\left[\beta+q(s-t+u)-\tfrac{2}{3}p(p+v)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&d\tau\wedge\omega^1-\tau v\,\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&ds\wedge\omega^1-dp\wedge\omega^2+\left[\tau-ps+1+\tfrac{1}{3}(pt-2pu-sv)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&dt\wedge\omega^1-dp\wedge\omega^2+\left[3q-2-\tfrac{1}{3}(tv+2ps+2pu)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0,\\
&du\wedge\omega^1+dv\wedge\omega^2+\left[2(\tau-1)+\tfrac{1}{3}(2sv+uv-tv-pu)\right]\omega^1\wedge\omega^2=0.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Замкнутая система (3.4),(3.5)- в инволюции и определяет конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$ с произволом двух функций двух аргументов.

Рассмотрим некоторые образы, ассоциированные с конгруэнцией $(PP^*)_{2,1}$.

1) Асимптотические линии поверхности (A_0):

$$\alpha(\omega^1)^2+2\,\omega^1\omega^2+\beta(\omega^2)^2=0. \tag{3.6}$$

2) Фокальные поверхности (F_i) ($i=1,2$) и торсы прямолинейной конгруэнции (A_0A_3). Имеем:

$$\bar F_1=\bar A_3,\quad \bar F_2=\bar A_0-\bar A_3 \tag{3.7}$$

Торсам прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) соответствуют координатные линии $\omega^1=0$, $\omega^2=0$.

3) Фокальные поверхности (F_i^*) и торсы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2). Они определяются формулами

$$\bar F_1^*=\bar A_1,\quad \bar F_2^*=\beta\bar A_1-\bar A_2, \tag{3.8}$$

$$\omega^1=0,\quad \tau(\alpha\omega^1+\omega^2)=0. \tag{3.9}$$

4) Асимптотические линии на поверхности (F_2):

$$S(\omega^1)^2 + q(\omega^2)^2 = 0. \tag{3.10}$$

Т е о р е м а I. Конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$ обладают следующими свойствами: I)Поверхность (A_1) является торсом.

2)Касательная плоскость к фокальной поверхности (F_2) содержит точки A_0, A_3.

3)Координатная сеть $\omega^1\omega^2 = 0$ сопряжена на поверхности (F_2).

§ 4. Конгруэнции K.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K называется такая конгруэнция $(PP^*)_{2,1}$, у которой координатная сеть на поверхности (A_0) является асимптотической.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции K существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как сеть линий (3.6) конгруэнции K является координатной, то

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0. \tag{4.1}$$

Используя (3.5), получим:

$$u = 0, \quad v + 2p = 0. \tag{4.2}$$

Система квадратичных уравнений конгруэнции K запишется в виде:

$$dp\wedge\omega^1 + dq\wedge\omega^2 + \left[q(s-t) + \tfrac{2}{3}p^2\right]\omega^1\wedge\omega^2 = 0,$$
$$dr\wedge\omega^1 + 2pr\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,$$
$$ds\wedge\omega^1 + (2 + \tfrac{1}{3}ps)\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,$$

$$dt\wedge\omega^1 + (3q - r - 1 + \tfrac{1}{3}pt)\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,$$
$$dp\wedge\omega^2 + \left[1 - r + \tfrac{1}{3}p(2s - t)\right]\omega^1\wedge\omega^2 = 0. \tag{4.3}$$

Имеем:

$$S_1 = 5, \quad q = 5, \quad s_2 = 0, \quad Q = N = 5.$$

Система уравнений, определяющая конгруэнции K, -в инволюции и имеет решение с произволом пяти функций одного аргумента.

Т е о р е м а 3. Конгруэнции K обладают следующими свойствами: I)торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) соответствуют, 2)касательная к линии (A_3) принадлежит соответствующей квадрике Ли поверхности (A_0), 3)поверхность (A_2) является фокальной поверхностью прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) В силу (4.I) уравнения (3.9) приводятся к виду:

$$\omega^1 = 0, \quad r\omega^2 = 0. \tag{4.4}$$

2) Уравнение квадрики Ли поверхности (A_0) в точке A_0 имеет вид:

$$x^1x^2 - x^0x^3 - p\,x^3x^3 = 0. \tag{4.5}$$

Прямая A_1A_3, являющаяся касательной к линии (A_3) в точке A_3, принадлежит квадрике (4.5). 3)Из формул (3.8), в силу (4.I), находим:

$$\bar{A}_2 = -\bar{F}_2^{\,K}.$$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K_1 называется конгруэнция K, у которой касательные к линиям $\omega^2 = 0$ на поверхности (A_2) пересекают прямые A_0A_3.

Т е о р е м а 4. Конгруэнции K_1 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$(d\bar{A}_2)_{\omega^2=0} = \omega^1(\tau\bar{A}_0+\rho\bar{A}_1+\bar{A}_3)+\theta_2\bar{A}_2 \qquad (4.7)$$

Условие пересечения с прямой A_0A_3 касательной к линии $\omega^2=0$ на поверхности (A_2) принимает вид:

$$\rho = 0. \qquad (4.8)$$

Из (4.3) находим

$$\tau = 1. \qquad (4.9)$$

Квадратичные уравнения конгруэнции K_1 запишутся в виде:

$$dq\wedge\omega^2+q\,(s-t)\,\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$ds\wedge\omega^1+2\,\omega^1\wedge\omega^2=0, \qquad (4.10)$$

$$dt\wedge\omega^1+(3q-2)\,\omega^1\wedge\omega^2=0.$$

Следовательно,

$$S_1=3,\ \sigma=3,\ S_2=0,\ Q=N=3$$

Т е о р е м а 5. Конгруэнции K_1 обладают следующими свойствами: 1) прямые A_0A_3 и A_1A_2 являются директрисами Вильчинского поверхности (A_0) 2) асимптотические линии $\omega^1=0$ на поверхности (A_0) принадлежат линейным комплексам, 3) Касательная плоскость к поверхности (A_2) в точке A_2 содержит точку, делящую гармонически вместе с F_2 точки A_2 и A_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Уравнения соприкасающихся линейных комплексов поверхности (A_0) имеют вид:

$$p_{12}+p_{03}=0,\ p_{12}-p_{03}=0 \qquad (4.11)$$

Прямые A_0A_3 и A_1A_2 принадлежат обоим комплексам.

2) Имеем:

$$d(p_{12}+p_{03})=\theta\,(p_{12}+p_{03})\ \ (\mathrm{mod}\ \omega^1).$$

Следовательно, линии $\omega^1=0$ на поверхности (A_0) принадлежат линейным комплексам. 3) Имеем:

$$d\bar{A}_2=\omega_2^2\bar{A}_2+\omega^1(\bar{A}_0+\bar{A}_3)+q\,\omega^2\bar{A}_1,$$

откуда следует утверждение последней части теоремы.

Л и т е р а т у р а :

1. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара ВИНИТИ, 1969, 2, 181-206.
2. Ткач Г.П. Пары конгруэнций парабол в эквиаффинном пространстве. Дифференциальная геометрия многообразий фигур (Труды Калининградского ун-та), 1971, вып. 2, 83-90.