УДК 514.75 (08)

Ю. И. Попов

ВВЕДЕНИЕ ПРОЕКТИВНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА $\mathcal{SH}$-РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Дано построение проективных связностей, определенных путем проектирования и ассоциированных с подрасслоениями Λ, L, E *сильно сопряженного трехсоставного распределения* ($\mathcal{SH}$*-распределения) проективного пространства. Приведены охваты компонент тензоров кручения-кривизны построенных проективных связностей* Γ, Z, ϑ *соответственно подрасслоений* Λ, L, E $\mathcal{SH}$*-распределения. Указан способ построения двойственных проективных связностей* $\overline{\Gamma}, \overline{Z}, \overline{\vartheta}$, *соответствующих связностям* Γ, Z, ϑ.

Projective connections defined by projection and associated to subbundles Λ, L, E *of the strong dual threefold distribution (the* $\mathcal{SH}$*-distribution) of the projective space are constructed. Coverages of torsion-curvature tensors components of the constructed projective connections* Γ, Z, ϑ *of subbundles* Λ, L, E *of the* $\mathcal{SH}$*-distribution respectively are given. The way of creation of dual projective connections* $\overline{\Gamma}, \overline{Z}, \overline{\vartheta}$ *corresponding to connections* Γ, Z, ϑ *is specified.*

Ключевые слова: распределение, проективная связность, подрасслоение, тензор кручения-кривизны, объект проективной связности, геометрический объект, охват геометрического объекта.

Key words: distribution, projective connection, subbundle, torsion-curvature tensor, projective connection object, geometrical object, geometrical object coverage.

Данная статья является непосредственным продолжением работы [1] и выполнена инвариантным теоретико-групповым методом Г. Ф. Лаптева [2; 3].

Во всей работе использована следующая схема индексов:

$$J, K, L = \overline{1, n};\ \overline{J}, \overline{K}, \overline{L} = \overline{0, n};$$
$$f, p, q, s, t = \overline{1, r};\ \overline{f}, \overline{p}, \overline{q}, \overline{s}, \overline{t} = \overline{0, r};\ \tilde{f}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s}, \tilde{t} = \{\overline{1, r}; n\};$$
$$h, i, j, k, l = \overline{r+1, m};\ \tilde{h}, \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{l} = \{\overline{r+1, m}; n\};\ \overline{h}, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k} = \{0; \overline{r+1, m}\};$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \eta, \varepsilon = \overline{m+1, n-1};\ \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon} = \overline{m+1, n};$$
$$a, b, c = \overline{1, m};\ \tilde{a}, \tilde{b} = \{\overline{1, m}; n\};\ \sigma, \rho, \tau = \overline{1, n-1};$$
$$A, B = \{\overline{1, r}; \overline{m+1, n-1}\};\ \tilde{A}, \tilde{B} = \{\overline{1, r}; \overline{m+1, n}\};\ u, v = \overline{r+1, n-1};\ \tilde{u}, \tilde{v} = \overline{r+1, n},$$

а также обозначения и символы работы [1].

1. Как известно [1], относительно репера 1-го порядка дифференциальные уравнения $\mathcal{SH}$ -распределения имеют вид

$$\omega_p^n = \Lambda_{p\tilde{q}}^n \omega_0^{\tilde{q}},\ \omega_i^n = \Lambda_{i\tilde{j}}^n \omega_0^{\tilde{j}},\ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\tilde{\beta}}^n \omega_0^{\tilde{\beta}},$$
$$\omega_p^\alpha = \Lambda_{p\tilde{A}}^\alpha \omega_0^{\tilde{A}},\ \omega_p^i = \Lambda_{p\tilde{a}}^i \omega_0^{\tilde{a}},\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{i\tilde{v}}^\alpha \omega_0^{\tilde{v}}, \quad (1)$$
$$\omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha\tilde{A}}^p \omega_0^{\tilde{A}},\ \omega_i^p = \Lambda_{i\tilde{a}}^p \omega_0^{\tilde{a}},\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha\tilde{v}}^i \omega_0^{\tilde{v}},$$

где компоненты фундаментального объекта второго порядка $\Gamma_2 = \{\Gamma_1;\ \Lambda_{\alpha\tilde{A}}^p,\ \Lambda_{i\tilde{a}}^p,\ \Lambda_{\alpha\tilde{v}}^i\}$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\Lambda_{pq}^n + \Lambda_{pq}^n \omega_0^0 = \Lambda_{pqL}^n \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{pn}^n + \Lambda_{pn}^n \omega_0^0 - \Lambda_{pq}^n \omega_n^q - \omega_p^0 = \Lambda_{pnL}^n \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \Lambda_{ijL}^n \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{in}^n + \Lambda_{in}^n \omega_0^0 - \Lambda_{ij}^n \omega_n^j - \omega_i^0 = \Lambda_{inL}^n \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{\alpha\beta}^n + \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = \Lambda_{\alpha\beta L}^n \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{\alpha n}^n + \Lambda_{\alpha n}^n \omega_0^0 - \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta - \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha nL}^n \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{p\tilde{A}}^\alpha + \Lambda_{p\tilde{A}}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{p\tilde{q}}^n \delta_{\tilde{A}}^{\tilde{q}} \omega_n^\alpha - \delta_{\tilde{A}}^\alpha \omega_p^0 = \Lambda_{p\tilde{A}L}^\alpha \omega_0^L, \quad (2)$$
$$\nabla\Lambda_{\alpha\tilde{A}}^p + \Lambda_{\alpha\tilde{A}}^p \omega_0^0 + \Lambda_{\alpha\tilde{A}}^n \omega_n^p - \delta_{\tilde{A}}^p \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha\tilde{A}L}^p \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{i\tilde{v}}^\alpha + \Lambda_{i\tilde{v}}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{i\tilde{j}}^n \delta_{\tilde{v}}^{\tilde{j}} \omega_n^\alpha - \delta_{\tilde{v}}^\alpha \omega_i^0 = \Lambda_{i\tilde{v}L}^\alpha \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{\alpha\tilde{v}}^i + \Lambda_{\alpha\tilde{v}}^i \omega_0^0 + \Lambda_{\alpha\tilde{v}}^n \omega_n^i - \delta_{\tilde{v}}^i \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha\tilde{v}L}^i \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{p\tilde{a}}^i + \Lambda_{p\tilde{a}}^i \omega_0^0 + \Lambda_{p\tilde{q}}^n \delta_{\tilde{a}}^{\tilde{q}} \omega_n^i - \delta_{\tilde{a}}^i \omega_p^0 = \Lambda_{p\tilde{a}L}^i \omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{i\tilde{a}}^p + \Lambda_{i\tilde{a}}^p \omega_0^0 + \Lambda_{i\tilde{a}}^n \omega_n^p - \delta_{\tilde{a}}^p \omega_i^0 = \Lambda_{i\tilde{a}L}^p \omega_0^L.$$

Имеет место [1].

Теорема 1. *В n-мерном проективном пространстве P_n сильно сопряженное распределение $\mathcal{SH}$ (1), (2) существует с произволом $2r(n-m-1)$ функций $(n-s)$ аргументов, $2rs$ функций $(m+1)$ аргументов и $2(n-m-1)\times$ $\times(m-r)$ функций $(n-r)$ аргументов.*

2. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,r}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n, а слоями (r-мерными центропроективными пространствами) — плоскости $\Lambda_r \overset{\text{def}}{=} \Lambda$ соответствующих r-мерных линейных элементов базисного Λ-подрасслоения данного $\mathcal{SH}$ -распределения.

Проективную связность Γ пространства $P_{n,r}$ определим при помощи системы форм $\{\Psi_{\bar{q}}^{\bar{p}}\}$:

$$\Psi_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \omega_{\bar{q}}^{\bar{p}} - \Gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}} \omega_0^K,$$

удовлетворяющих структурным уравнениям [3; 4]

$$D\omega_0^J = \omega_0^L \wedge \omega_L^J + \omega_0^0 \wedge \omega_0^J,$$
$$D\Psi_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \Psi_{\bar{q}}^{\bar{s}} \wedge \Psi_{\bar{s}}^{\bar{p}} + \omega_0^K \wedge \Delta\Gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}}, \tag{3}$$

где

$$\Delta\Gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}} = d\Gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}} - \Gamma_{\bar{s}K}^{\bar{p}}\omega_{\bar{q}}^{\bar{s}} + \Gamma_{\bar{q}K}^{\bar{s}}\omega_{\bar{s}}^{\bar{p}} - \Gamma_{\bar{q}J}^{\bar{p}}\omega_K^J + \Gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}}\omega_0^0 + \Lambda_{\bar{q}K}^u\omega_u^{\bar{p}} + \Lambda_{\bar{q}K}^n\omega_n^{\bar{p}} - \Gamma_{\bar{s}L}^{\bar{p}}\Gamma_{\bar{q}K}^{\bar{s}}\omega_0^L,$$
$$\Lambda_{0K}^u = \delta_K^u,\ \Lambda_{0K}^n = \delta_K^n.$$

Геометрический объект $\Gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}}$, следуя работе [4], назовем *объектом проективной связности* пространства $P_{n,r}$.

Формы $\Psi_{\bar{q}}^{\bar{p}}$ (3) определяют проективную связность в слоях (плоскостях Λ-подрасслоения) пространства проективной связности $P_{n,r}$ тогда и только тогда [2—4], когда

$$\Delta\Gamma_{\bar{q}K}^{\bar{p}} = \Gamma_{\bar{q}KL}^{\bar{p}}\omega_0^L. \tag{4}$$

При этом структурные уравнения для слоевых форм $\Psi_{\bar{q}}^{\bar{p}}$ (3) пространства $P_{n,r}$ имеют вид

$$D\Psi_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \Psi_{\bar{q}}^{\bar{s}} \wedge \Psi_{\bar{s}}^{\bar{p}} + R_{\bar{q}KL}^{\bar{p}}\omega_0^K \wedge \omega_0^L, \tag{5}$$

где $R_{\bar{q}KL}^{\bar{p}} = \Gamma_{\bar{q}[KL]}^{\bar{p}}$ — компоненты тензора кручения-кривизны проективной связности Γ пространства $P_{n,r}$.

Пусть базисное Λ-подрасслоение $\mathcal{SH}$ -распределения оснащено в смысле Картана [5] внутренним образом. Итак, в каждом центре A_0 элемента $\mathcal{SH}$ -распределения внутренним инвариантным образом присоединена оснащающая плоскость $K_{n-r-1}(\nu_n^p)$ [5], принадлежащая нормали 1-го рода $N_{n-r}(A_0)$ базисного Λ-подрасслоения и не проходящая через точку A_0.

Известно [5], что плоскость Картана $K_{n-r-1}(\nu_n^p)$ натянута на точки

$$K_\alpha = A_\alpha + \Lambda_\alpha^0 A_0,\ K_i = A_i + \Lambda_i^0 A_0,$$
$$K_n(\nu_n^p) = (\nu_n^0 + \nu_n^u\Lambda_u^0)A_0 + \nu_n^p A_p + A_n, \tag{6}$$

где

$$\nu_n^0 = -\frac{1}{r}(\nu_{np}^p - \Lambda_{pq}^n\nu_n^p\nu_n^q),\ \nabla_\delta\nu_n^0 - \nu_v^0\pi_n^v + \nu_n^p\pi_p^0 + \pi_n^0 = 0,$$
$$\Lambda_\alpha^0 = -\frac{1}{r}\Lambda_{\alpha p}^p,\ \nabla_\delta\Lambda_\alpha^0 + \pi_\alpha^0 = 0,\ \Lambda_i^0 = -\frac{1}{r}\Lambda_{ip}^p,\ \nabla_\delta\Lambda_i^0 + \pi_i^0 = 0.$$

Построим проективную связность Γ, внутренне определенную самим $\mathcal{SH}$ -распределением, т. е. построим охват объекта проективной связности Γ фундаментальными объектами $\mathcal{SH}$ -распределения.

Предварительно запишем систему дифференциальных уравнений (4) в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\nabla\Gamma^{p}_{0\sigma}\equiv 0,\ \nabla\Gamma^{p}_{0n}-\Gamma^{p}_{0\sigma}\omega^{\sigma}_{n}+\omega^{p}_{n}=\tilde{\Gamma}^{p}_{0nL}\omega^{L}_{0},\\
\dots\\
\nabla\Gamma^{0}_{0p}+\Gamma^{s}_{0p}\omega^{0}_{s}\equiv 0,\ \nabla\Gamma^{0}_{0u}+\Gamma^{p}_{0u}\omega^{0}_{p}+\omega^{0}_{u}=\tilde{\Gamma}^{0}_{0uL}\omega^{L}_{0},\\
\nabla\Gamma^{0}_{0n}-\Gamma^{0}_{0\sigma}\omega^{\sigma}_{n}+\Gamma^{p}_{0n}\omega^{0}_{p}+\omega^{0}_{n}=\tilde{\Gamma}^{0}_{0nL}\omega^{L}_{0},\\
\dots\\
\nabla\Gamma^{p}_{q\sigma}+\Gamma^{p}_{q\sigma}\omega^{0}_{0}-\Gamma^{p}_{0\sigma}\omega^{0}_{q}+\Lambda^{n}_{q\sigma}\omega^{p}_{n}\equiv 0,\\
\nabla\Gamma^{p}_{qn}+\Gamma^{p}_{qn}\omega^{0}_{0}-\Gamma^{p}_{0n}\omega^{0}_{q}-\Gamma^{p}_{q\sigma}\omega^{\sigma}_{n}+\Lambda^{n}_{qn}\omega^{p}_{n}\equiv 0,\\
\dots\\
\nabla\Gamma^{0}_{q\sigma}+\Gamma^{0}_{q\sigma}\omega^{0}_{0}-\Gamma^{0}_{0\sigma}\omega^{0}_{q}+\Gamma^{s}_{q\sigma}\omega^{0}_{s}+\Lambda^{\tilde{v}}_{q\sigma}\omega^{0}_{\tilde{v}}\equiv 0,\\
\nabla\Gamma^{0}_{qn}+\Gamma^{0}_{qn}\omega^{0}_{0}-\Gamma^{0}_{0n}\omega^{0}_{q}+\Gamma^{s}_{qn}\omega^{0}_{s}+\Lambda^{\tilde{v}}_{qn}\omega^{0}_{\tilde{v}}-\Gamma^{0}_{q\sigma}\omega^{\sigma}_{n}\equiv 0.
\end{gathered}\tag{7}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (7) удовлетворяются, если охваты компонент объекта проективной связности $\Gamma=\{\Gamma^{\bar{p}}_{\bar{q}K}\}$ представить в виде

$$\begin{gathered}
\Gamma^{p}_{0\sigma}=0,\ \Gamma^{p}_{0n}=\nu^{p}_{n},\\
\Gamma^{0}_{0p}=0,\ \Gamma^{0}_{0v}=\Lambda^{0}_{v},\ \Gamma^{0}_{0n}=\nu^{0}_{n},\\
\Gamma^{p}_{qK}=\Lambda^{n}_{q\tilde{t}}\delta^{\tilde{t}}_{K}\nu^{p}_{n},\\
\Gamma^{0}_{qK}=\Lambda^{n}_{q\tilde{t}}\delta^{\tilde{t}}_{K}\nu^{0}_{n}+\Lambda^{0}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{q\tilde{A}}\delta^{\tilde{A}}_{K}+\Lambda^{0}_{i}\Lambda^{i}_{q\tilde{a}}\delta^{\tilde{a}}_{K}.
\end{gathered}\tag{8}$$

Замечание. *Порядок* $t\geqslant 2$ *охвата объекта проективной связности* Γ *по формулам* (8) *зависит от порядка охватов квазитензоров* $\{\nu^{p}_{n}\}$, $\{\nu^{0}_{n},\nu^{p}_{n},\Lambda^{0}_{v}\}$.

Слоевые формы $\Psi^{\bar{p}}_{\bar{q}}$ пространства проективной связности $P_{n,r}$, внутренне определенного на подрасслоении $\Lambda\subset\mathscr{SH}$, имеют вид

$$\begin{gathered}
\Psi^{0}_{0}=\omega^{0}_{0}-(\nu^{0}_{n}\delta^{n}_{K}+\Lambda^{0}_{v}\delta^{v}_{K})\omega^{K}_{0},\\
\Psi^{p}_{0}=\omega^{p}_{0}-\nu^{p}_{n}\delta^{n}_{K}\omega^{K}_{0},\ \Psi^{p}_{q}=\omega^{p}_{q}-\nu^{p}_{n}\Lambda^{n}_{q\tilde{t}}\delta^{\tilde{t}}_{K}\omega^{K}_{0},\\
\Psi^{0}_{q}=\omega^{0}_{q}-(\nu^{0}_{n}\Lambda^{n}_{q\tilde{t}}\delta^{\tilde{t}}_{K}+\Lambda^{0}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{q\tilde{A}}\delta^{\tilde{A}}_{K}+\Lambda^{0}_{i}\Lambda^{i}_{q\tilde{a}}\delta^{\tilde{a}}_{K})\omega^{K}_{0}.
\end{gathered}\tag{9}$$

Можно показать, следуя работе [4], что построенная внутренним образом проективная связность Γ определена путем проектирования при помощи оснащающей по Картану плоскости $K_{n-r-1}(\nu^{p}_{n})=[K_{i},K_{\alpha},K_{n}]$ (6).

Компоненты тензора кручения-кривизны $R^{\bar{p}}_{\bar{q}KL}$ пространства $P_{n,r}$ в структурных уравнениях (5) имеют следующие охваты:

$$R^0_{0KL}=\Lambda^0_i\nu^p_n\Lambda^i_{p\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^n_{L]}+\Lambda^0_\alpha\nu^p_n\Lambda^\alpha_{p\tilde A}\delta^{\tilde A}_{[K}\delta^n_{L]}+\nu^0_n\nu^p_n\Lambda^n_{p\tilde t}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^n_{L]}-\Lambda^0_i\Lambda^i_{p\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^p_{L]}-$$
$$-\Lambda^0_\alpha\Lambda^\alpha_{p\tilde A}\delta^{\tilde A}_{[K}\delta^p_{L]}-\nu^0_n\Lambda^n_{p\tilde t}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^p_{L]}-\Lambda^0_{v[K}\delta^v_{L]}-\nu^0_{n[K}\delta^n_{L]},$$
$$R^p_{0KL}=\Lambda^0_v\delta^v_{[K}\delta^p_{L]}+\nu^0_n\delta^n_{[K}\delta^p_{L]}+\nu^p_n\nu^s_n\Lambda^n_{s\tilde t}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^n_{L]}-\Lambda^p_{i\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^i_{L]}-$$
$$-\Lambda^p_{\alpha\tilde A}\delta^{\tilde A}_{[K}\delta^\alpha_{L]}-\nu^p_n\Lambda^n_{s\tilde t}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^s_{L]}-\nu^p_n\Lambda^0_v\delta^v_{[K}\delta^n_{L]}-\nu^p_{n[K}\delta^n_{L]},$$

$$R^p_{qKL}=\nu^0_n\Lambda^n_{q\tilde t}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^p_{L]}-\nu^p_n\Lambda^n_{q\tilde t[K}\delta^{\tilde t}_{L]}-\Lambda^n_{q\tilde t}\nu^p_{n[K}\delta^{\tilde t}_{L]}+\Lambda^0_i\Lambda^i_{q\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^p_{L]}+$$
$$+\Lambda^0_\alpha\Lambda^\alpha_{q\tilde A}\delta^{\tilde A}_{[K}\delta^p_{L]}+\Lambda^i_{q\tilde a}\Lambda^p_{i\tilde b}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^{\tilde b}_{L]}+\Lambda^\alpha_{q\tilde A}\Lambda^p_{\alpha\tilde B}\delta^{\tilde A}_{[K}\delta^{\tilde B}_{L]}-\nu^p_n\nu^0_n\Lambda^n_{q\tilde t}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^n_{L]}-$$
$$-\nu^p_n\Lambda^0_i\Lambda^i_{q\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^n_{L]}-\nu^p_n\Lambda^0_\alpha\Lambda^\alpha_{q\tilde A}\delta^{\tilde A}_{[K}\delta^n_{L]}-\nu^p_n\nu^s_n\Lambda^n_{q\tilde t}\Lambda^n_{s\tilde f}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^{\tilde f}_{L]},$$

$$R^0_{qKL}=\nu^0_n\Lambda^n_{q\tilde t[K}\delta^{\tilde t}_{L]}-\Lambda^n_{q\tilde t}\nu^0_{n[K}\delta^{\tilde t}_{L]}+\Lambda^i_{q\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\Lambda^0_{|i|L]}+\Lambda^\alpha_{q\tilde A}\delta^{\tilde A}_{[K}\Lambda^0_{|\alpha|L]}-$$
$$-\Lambda^0_i\Lambda^i_{q\tilde a[K}\delta^{\tilde a}_{L]}-\Lambda^0_\alpha\Lambda^\alpha_{q\tilde A[K}\delta^{\tilde A}_{L]}-\nu^0_n\nu^0_n\Lambda^n_{q\tilde t}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^n_{L]}-\nu^0_n\Lambda^0_i\Lambda^i_{q\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^n_{L]}-$$
$$-\nu^0_n\Lambda^0_\alpha\Lambda^\alpha_{q\tilde A}\delta^{\tilde A}_{[K}\delta^n_{L]}-\nu^0_n\Lambda^0_v\Lambda^n_{q\tilde t}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^v_{L]}-\Lambda^0_v\Lambda^0_i\Lambda^i_{q\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^v_{L]}-$$
$$-\Lambda^0_v\Lambda^0_\alpha\Lambda^\alpha_{q\tilde A}\delta^{\tilde A}_{[K}\delta^v_{L]}-\nu^0_n\nu^s_n\Lambda^n_{q\tilde t}\Lambda^n_{s\tilde f}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^{\tilde f}_{L]}-\Lambda^0_i\nu^s_n\Lambda^n_{q\tilde t}\Lambda^i_{s\tilde a}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^{\tilde a}_{L]}-$$
$$-\Lambda^0_\alpha\nu^s_n\Lambda^n_{q\tilde t}\Lambda^\alpha_{s\tilde A}\delta^{\tilde t}_{[K}\delta^{\tilde A}_{L]}.$$

3. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,s}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n, а слоями (s-мерными центропроективными пространствами) — плоскости L_s ($s=m-r$) соответствующих s-мерных линейных элементов L-подрасслоения данного $\mathcal{SH}$ -распределения.

Определим проективную связность Z в L-подрасслоении при помощи системы форм $\{\theta^{\bar i}_{\bar j}\}$

$$\theta^{\bar i}_{\bar j}=\omega^{\bar i}_{\bar j}-Z^{\bar i}_{\bar jK}\omega^K_0, \tag{10}$$

удовлетворяющих структурным уравнениям [3; 4]

$$\begin{aligned}D\omega^J_0&=\omega^L_0\wedge\omega^J_L+\omega^0_0\wedge\omega^J_0,\\ D\theta^{\bar i}_{\bar j}&=\theta^{\bar k}_{\bar j}\wedge\theta^{\bar i}_{\bar k}+\omega^K_0\wedge\Delta Z^{\bar i}_{\bar jK},\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\Delta Z^{\bar i}_{\bar jK}=dZ^{\bar i}_{\bar jK}-Z^{\bar i}_{\bar hK}\omega^{\bar h}_{\bar j}+Z^{\bar h}_{\bar jK}\omega^{\bar i}_{\bar h}-Z^{\bar i}_{\bar jL}\omega^L_K+Z^{\bar i}_{\bar jK}\omega^0_0+\Lambda^{\tilde A}_{\bar jK}\omega^{\bar i}_{\tilde A}-Z^{\bar i}_{\bar hL}Z^{\bar h}_{\bar jK}\omega^L_0,$$
$$\Lambda^{\tilde A}_{0K}=\delta^{\tilde A}_K.$$

Для того чтобы формы $\theta^{\bar i}_{\bar j}$ (10) определяли проективную связность в слоях (плоскостях L_s подрасслоения $L\subset\mathcal{SH}$) пространства проективной связности $P_{n,s}$, необходимо и достаточно, чтобы было задано поле объекта связности $\{Z^{\bar i}_{\bar jK}\}$ [2]—[4], т. е. выполнялись дифференциальные уравнения

$$\Delta Z^{\bar i}_{\bar jK}=Z^{\bar i}_{\bar jKL}\omega^L_0. \tag{12}$$

В этом случае структурные уравнения слоевых форм $\theta^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ (10) L-подрасслоения данного $\mathcal{SH}$-распределения имеют вид

$$D\theta^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \theta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \wedge \theta^{\bar{i}}_{\bar{k}} + \Pi^{\bar{i}}_{\bar{j}KL}\omega^K_0 \wedge \omega^L_0, \tag{13}$$

где $\Pi^{\bar{i}}_{\bar{j}KL} = Z^{\bar{i}}_{\bar{j}[KL]}$ — тензор кручения-кривизны проективной связности пространства $P_{n,s}$ [2—4].

Предположим, что L-подрасслоение оснащено в смысле Э. Картана внутренним образом полем плоскостей $C_{n-s-1}(\nu^i_n)(A_0)$ [5].

Оснащающая плоскость $C_{n-s-1}(\nu^i_n)(A_0)$ натянута на точки [5]:

$$\begin{gathered} C_\alpha = A_\alpha + L^0_\alpha A_0,\, C_p = A_p + L^0_p A_0, \\ C_n(\nu^i_n) = (\varphi^0_n + \nu^A_n L^0_A)A_0 + \nu^\sigma_n A_\sigma + A_n, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\varphi^0_n = -\frac{1}{s}(\nu^i_{ni} - \Lambda^n_{ij}\nu^i_n\nu^j_n),\, \nabla_\delta\varphi^0_n = L^0_\alpha\pi^\alpha_n - L^0_p\pi^p_n + \nu^i_n\pi^0_i + \pi^0_n = 0,$$
$$L^0_p = -\frac{1}{s}\Lambda^i_{pi},\, \nabla_\delta L^0_p + \pi^0_p = 0,\, L^0_\alpha = -\frac{1}{s}\Lambda^i_{\alpha i},\, \nabla_\delta L^0_\alpha + \pi^0_\alpha = 0,$$
$$L^0_A = -\frac{1}{s}\Lambda^i_{Ai},\, \nabla_\delta L^0_A + \pi^0_A = 0.$$

Построим проективную связность Z, внутренне определенную самим $\mathcal{SH}$-распределением.

Охват компонент объекта проективной связности Z можно осуществить с помощью функций

$$\begin{gathered} Z^0_{0K} = \varphi^0_n\delta^n_K + L^0_A\delta^A_K,\, Z^i_{0K} = \nu^i_n\delta^n_K,\, Z^i_{jK} = \Lambda^n_{j\tilde{h}}\delta^{\tilde{h}}_K\nu^i_n, \\ Z^0_{jK} = \varphi^0_n\Lambda^n_{j\tilde{i}}\delta^{\tilde{i}}_K + L^0_\alpha\Lambda^\alpha_{j\tilde{v}}\delta^{\tilde{v}}_K + L^0_p\Lambda^p_{j\tilde{a}}\delta^{\tilde{a}}_K, \end{gathered} \tag{15}$$

которые удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям (12).

В силу (15) слоевые формы $\theta^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ пространства проективной связности $P_{n,s}$, внутренне определенного $\mathcal{SH}$-распределением, примут вид

$$\begin{gathered} \theta^0_0 = \omega^0_0 - (\varphi^0_n\delta^n_K + L^0_A\delta^A_K)\omega^K_0, \\ \theta^i_0 = \omega^i_0 - \nu^i_n\delta^n_K\omega^K_0,\, \theta^i_j = \omega^i_j - \Lambda^n_{j\tilde{h}}\delta^{\tilde{h}}_K\nu^i_n\omega^K_0, \\ \theta^0_j = \omega^0_j - (\varphi^0_n\Lambda^n_{j\tilde{i}}\delta^{\tilde{i}}_K + L^0_\alpha\Lambda^\alpha_{j\tilde{v}}\delta^{\tilde{v}}_K + L^0_p\Lambda^p_{j\tilde{a}}\delta^{\tilde{a}}_K)\omega^K_0. \end{gathered} \tag{16}$$

Следуя работе [4], нами доказано, что проективная связность Z, определенная формами (16), получена проектированием при помощи оснащающей по Э. Картану плоскости $C_{n-s-1}(\nu^i_n)(A_0)$ (14).

Компоненты тензора кручения-кривизны $\{\Pi^{\tilde i}_{\tilde j KL}\}$ связности Z, определенной в слоях L-подрасслоения, в структурных уравнениях (13) имеют следующее строение:

$$\Pi^0_{0KL} = \varphi^0_n \nu^h_n \Lambda^n_{h\tilde j}\delta^{\tilde j}_K + L^0_\alpha \nu^h_n \Lambda^\alpha_{h\tilde v}\delta^{\tilde v}_{[K}\delta^n_{L]} + L^0_p \nu^h_n \Lambda^p_{h\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^n_{L]} - L^0_\alpha \Lambda^\alpha_{h\tilde v}\delta^{\tilde v}_{[K}\delta^h_{L]} -$$
$$- L^0_p \Lambda^p_{h\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^h_{L]} - \varphi^0_n \Lambda^n_{h\tilde j}\delta^{\tilde j}_{[K}\delta^h_{L]} - L^0_{A[K}\delta^A_{L]} - \varphi^0_{n[K}\delta^n_{L]},$$

$$\Pi^i_{0KL} = \nu^i_n \nu^h_n \Lambda^n_{h\tilde j}\delta^{\tilde j}_{[K}\delta^n_{L]} + L^0_A \nu^i_n \delta^n_{[K}\delta^A_{L]} + \varphi^0_n \delta^n_{[K}\delta^i_{L]} + L^0_A \delta^A_{[K}\delta^i_{L]} -$$
$$- \Lambda^i_{\alpha\tilde v}\delta^{\tilde v}_{[K}\delta^\alpha_{L]} - \Lambda^i_{p\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^p_{L]} - \nu^i_n \Lambda^n_{h\tilde j}\delta^{\tilde j}_{[K}\delta^h_{L]} - \nu^i_{n[K}\delta^n_{L]},$$

$$\Pi^i_{jKL} = \Lambda^0_{j[K}\nu^i_{|n|L]} - \Lambda^n_{j\tilde h[K}\delta^{\tilde h}_{L]}\nu^i_n + \varphi^0_n \Lambda^n_{j\tilde h}\delta^{\tilde h}_{[K}\delta^i_{L]} + \Lambda^0_\alpha \Lambda^\alpha_{j\tilde v}\delta^{\tilde v}_{[K}\delta^i_{L]} +$$
$$+ L^0_p \Lambda^p_{j\tilde u}\delta^{\tilde u}_{[K}\delta^i_{L]} + \Lambda^\alpha_{j\tilde v}\Lambda^i_{\alpha\tilde u}\delta^{\tilde v}_{[K}\delta^{\tilde u}_{L]} + \Lambda^p_{j\tilde a}\Lambda^i_{p\tilde b}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^{\tilde b}_{L]} - \nu^i_n \varphi^0_n \Lambda^n_{j\tilde h}\delta^{\tilde h}_{[K}\delta^n_{L]} -$$
$$- \nu^i_n L^0_\alpha \Lambda^\alpha_{j\tilde v}\delta^{\tilde v}_{[K}\delta^n_{L]} - \nu^i_n L^0_p \Lambda^p_{j\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^n_{L]} - \nu^i_n \nu^k_n \Lambda^n_{jh}\Lambda^n_{kl}\delta^h_{[K}\delta^l_{L]},$$

$$\Pi^0_{jKL} = \Lambda^n_{j\tilde h}\delta^{\tilde h}_{[K}\varphi^0_{|n|L]} - \varphi^0_n \Lambda^n_{j\tilde h[K}\delta^{\tilde h}_{L]} - L^0_\alpha \Lambda^\alpha_{j\tilde v[K}\delta^{\tilde v}_{L]} - L^0_p \Lambda^p_{j\tilde a[K}\delta^{\tilde a}_{L]} -$$
$$- \Lambda^\alpha_{j\tilde v}L^0_{\alpha[K}\delta^{\tilde v}_{L]} - \Lambda^p_{j\tilde a}L^0_{p[K}\delta^{\tilde a}_{L]} - \varphi^0_n \varphi^0_n \Lambda^n_{j\tilde h}\delta^{\tilde h}_{[K}\delta^n_{L]} - \varphi^0_n L^0_\beta \Lambda^\beta_{j\tilde v}\delta^{\tilde v}_{[K}\delta^n_{L]} -$$
$$- \varphi^0_n L^0_p \Lambda^p_{j\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^n_{L]} - \varphi^0_n L^0_A \Lambda^n_{j\tilde h}\delta^{\tilde h}_{[K}\delta^A_{L]} - L^0_A L^0_\beta \Lambda^\beta_{j\tilde v}\delta^{\tilde v}_{[K}\delta^A_{L]} -$$
$$- L^0_A L^0_p \Lambda^p_{j\tilde a}\delta^{\tilde a}_{[K}\delta^A_{L]} - \varphi^0_n \nu^h_n \Lambda^n_{j\tilde i}\Lambda^n_{h\tilde l}\delta^{\tilde i}_{[K}\delta^{\tilde l}_{L]} - L^0_\alpha \nu^h_n \Lambda^n_{j\tilde i}\Lambda^\alpha_{h\tilde v}\delta^{\tilde i}_{[K}\delta^{\tilde v}_{L]} -$$
$$- L^0_p \nu^h_n \Lambda^n_{j\tilde i}\Lambda^p_{h\tilde a}\delta^{\tilde i}_{[K}\delta^{\tilde a}_{L]}.$$

4. E-подрасслоение $\mathcal{SH}$-распределения [1] можно трактовать как пространство проективной связности $P_{n,n-m-1}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n, а слоями ($(n-m-1)$-мерными центропроективными пространствами) — характеристики E_{n-m-1} соответствующих $(n-1)$-мерных линейных элементов оснащающего $\mathcal{H}$-подрасслоения данного $\mathcal{SH}$-распределения.

Проективную связность ϑ в слоях E-подрасслоения (пространства $P_{n,n-m-1}$) можно определить при помощи форм $\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta}$:

$$\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta} = \omega^{\bar\alpha}_{\bar\beta} - \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}\omega^K_0, \tag{17}$$

удовлетворяющих структурным уравнениям [3; 4]

$$D\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta} = \vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\beta} \wedge \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma} + \omega^K_0 \wedge \Delta\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K},$$

где

$$\Delta\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K} = d\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K} - \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta L}\omega^L_K - \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma K}\omega^{\bar\gamma}_{\bar\beta} + \vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\beta K}\omega^{\bar\alpha}_{\bar\gamma} + \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}\omega^0_0 + \Lambda^{\tilde a}_{\bar\beta K}\omega^{\bar\alpha}_{\tilde a} - \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma L}\vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\beta K}\omega^L_0,$$
$$\Lambda^{\tilde a}_{0K} = \delta^{\tilde a}_K.$$

Геометрический объект $\{\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}\}$ назовем [4] *объектом проективной связности E-подрасслоения* (или, что то же, *пространства* $P_{n,n-m-1}$). Для того чтобы формы $\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta}$ определяли проективную связность ϑ на E-подрасслоении, необходимо и достаточно [2—4], чтобы было задано поле объекта связности $\{\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}\}$, т. е. выполнялись дифференциальные уравнения

$$\Delta\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K} = \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta KL}\omega^L_0, \tag{18}$$

или, что то же,

$$D\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta} = \vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\beta}\wedge\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma} + \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta KL}\omega^K_0\wedge\omega^L_0,$$

где $\mathcal{T}^{\bar\alpha}_{\bar\beta KL} = \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta[KL]}$ — компоненты тензора кручения-кривизны $\{\mathcal{T}^{\bar\alpha}_{\bar\beta KL}\}$ E-подрасслоения (пространства $P_{n,n-m-1}$).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (18) удовлетворяются, если охваты компонент объекта проективной связности $\{\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}\}$ представить в виде

$$\begin{gathered}\vartheta^0_{0K} = \varepsilon^0_n\delta^n_K + \varepsilon^0_a\delta^a_K,\ \vartheta^\alpha_{0K} = \nu^\alpha_n\delta^n_K,\ \vartheta^\alpha_{\beta K} = \nu^\alpha_n\Lambda^n_{\beta\tilde\gamma}\delta^{\tilde\gamma}_K,\\ \vartheta^0_{\alpha K} = \varepsilon^0_n\Lambda^n_{\alpha\tilde\gamma}\delta^{\tilde\gamma}_K + \varepsilon^0_i\Lambda^i_{\alpha\tilde v}\delta^{\tilde v}_K + \varepsilon^0_p\Lambda^p_{\alpha\tilde A}\delta^{\tilde A}_K,\end{gathered} \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered}\varepsilon^0_n = -\frac{1}{n-m-1}(\nu^\alpha_{n\alpha} - \Lambda^n_{\alpha\beta}\nu^\alpha_n\nu^\beta_n),\ \nabla_\delta\varepsilon^0_n - \varepsilon^0_\alpha\pi^\alpha_n + \nu^\alpha_n\pi^0_\alpha + \pi^0_n = 0,\\ \varepsilon^0_i = -\frac{1}{n-m-1}\Lambda^\alpha_{i\alpha},\ \nabla_\delta\varepsilon^0_i + \pi^0_i = 0,\\ \varepsilon^0_p = -\frac{1}{n-m-1}\Lambda^\alpha_{p\alpha},\ \nabla_\delta\varepsilon^0_p + \varepsilon^0_p = 0,\\ \varepsilon^0_a = -\frac{1}{n-m-1}\Lambda^a_{ia},\ \nabla_\delta\varepsilon^0_a + \pi^0_a = 0.\end{gathered}$$

Замечание. *Порядок* $t \geqslant 2$ *охвата объекта* $\{\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}\}$ (19)*, а также объекта* $\{Z^{\bar i}_{\bar jK}\}$ (15) *зависит от порядка охватов квазитензоров* $\{\nu^\alpha_n\}$, $\{\nu^i_n\}$, $\{\varepsilon^0_n, \varepsilon^0_a, \nu^\alpha_n\}$, $\{\varphi^0_n, L^0_A, \nu^i_n\}$, *участвующих в охватах* (19), (15). *Построение квазитензоров* $\{\nu^p_n\}$, $\{\nu^i_n\}$, $\{\nu^\alpha_n\}$ *различных порядков приведены в работах* [5; 6].

Итак, слоевые формы $\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta}$ (17) связности ϑ в силу (19) примут вид

$$\begin{aligned}\vartheta^0_0 &= \omega^0_0 - (\varepsilon^0_n\delta^n_K + \varepsilon^0_a\delta^a_K)\omega^K_0,\\ \vartheta^\alpha_0 &= \omega^\alpha_0 - \nu^\alpha_n\delta^n_K\omega^K_0,\\ \vartheta^\alpha_\beta &= \omega^\alpha_\beta - \nu^\alpha_n\Lambda^n_{\beta\tilde\gamma}\delta^{\tilde\gamma}_K\omega^K_0,\\ \vartheta^0_\alpha &= \omega^0_\alpha - (\varepsilon^0_n\Lambda^n_{\alpha\tilde\gamma}\delta^{\tilde\gamma}_K + \varepsilon^0_i\Lambda^i_{\alpha\tilde v}\delta^{\tilde v}_K + \varepsilon^0_p\Lambda^p_{\alpha\tilde A}\delta^{\tilde A}_K)\omega^K_0.\end{aligned} \tag{20}$$

Нами показано, следуя работе [4], что проективная связность ϑ определяется путем проектирования при помощи оснащающей в смысле Картана плоскости

$$C_m(A_0) = [\tilde{K}_p, \tilde{K}_i, \tilde{K}_n]$$

[5; 6], где

$$\tilde{K}_p = A_p - \varepsilon_p^0 A_0,\ \tilde{K}_i = A_i - \varepsilon_i^0 A_0,$$
$$\tilde{K}_n = (\varepsilon_n^0 + \nu_n^a M_a^0) A_0 + \nu_n^\sigma A_\sigma + A_n.$$

Проведем охваты компонент тензора кручения-кривизны $\{\mathcal{T}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}KL}\}$ связности ϑ, определенной на E-подрасслоении многообразия $\mathcal{SH}$:

$$\mathcal{T}^0_{0KL} = \varepsilon_n^0 \nu_n^\gamma \Lambda^n_{\gamma\tilde{a}} \delta^{\tilde{a}}_{[K} \delta^n_{L]} + \varepsilon_p^0 \nu_n^\gamma \Lambda^p_{\gamma\tilde{A}} \delta^{\tilde{A}}_{[K} \delta^n_{L]} + \varepsilon_i^0 \nu_n^\gamma \Lambda^i_{\gamma\tilde{v}} \delta^{\tilde{v}}_{[K} \delta^n_{L]} - \varepsilon^0_{a[K} \delta^a_{L]} -$$
$$- \varepsilon_p^0 \Lambda^p_{\gamma\tilde{A}} \delta^{\tilde{A}}_{[K} \delta^\gamma_{L]} - \varepsilon_i^0 \Lambda^i_{\gamma\tilde{v}} \delta^{\tilde{v}}_{[K} \delta^\gamma_{L]} - \varepsilon_n^0 \Lambda^n_{\gamma\tilde{\alpha}} \delta^{\tilde{\alpha}}_{[K} \delta^\gamma_{L]} - \varepsilon^0_{n[K} \delta^n_{L]},$$

$$\mathcal{T}^\alpha_{0KL} = \nu_n^\alpha \nu_n^\gamma \Lambda^n_{\gamma\hat{\beta}} \delta^{\hat{\beta}}_{[K} \delta^n_{L]} + \varepsilon_n^0 \delta^n_{[K} \delta^\alpha_{L]} + \varepsilon_a^0 \delta^a_{[K} \delta^\alpha_{L]} - \nu_n^\alpha \Lambda^n_{\gamma\hat{\beta}} \delta^{\hat{\beta}}_{[K} \delta^\gamma_{L]} -$$
$$- \nu_n^\alpha \varepsilon_a^0 \delta^a_{[K} \delta^n_{L]} - \Lambda^\alpha_{p\tilde{A}} \delta^{\tilde{A}}_{[K} \delta^p_{L]} - \Lambda^\alpha_{i\tilde{v}} \delta^{\tilde{v}}_{[K} \delta^i_{L]} - \nu^\alpha_{n[K} \delta^n_{L]},$$

$$\mathcal{T}^\alpha_{\beta KL} = \Lambda^n_{\beta\tilde{\gamma}} \delta^{\tilde{\gamma}}_{[K} \nu^\alpha_{|n|L]} - \nu_n^\alpha \Lambda^n_{\beta\tilde{\gamma}[K} \delta^{\tilde{\gamma}}_{L]} + \varepsilon_n^0 \Lambda^n_{\beta\tilde{\gamma}} \delta^{\tilde{\gamma}}_{[K} \delta^\alpha_{L]} + \varepsilon_p^0 \Lambda^p_{\beta\tilde{A}} \delta^{\tilde{A}}_{[K} \delta^\alpha_{L]} +$$
$$+ \varepsilon_i^0 \Lambda^i_{\beta\tilde{v}} \delta^{\tilde{v}}_{[K} \delta^\alpha_{L]} + \Lambda^p_{\beta\tilde{A}} \Lambda^\alpha_{p\tilde{B}} \delta^{\tilde{A}}_{[K} \delta^{\tilde{B}}_{L]} + \Lambda^i_{\beta\tilde{v}} \Lambda^\alpha_{i\tilde{u}} \delta^{\tilde{v}}_{[K} \delta^{\tilde{u}}_{L]} - \nu_n^\alpha \varepsilon_n^0 \Lambda^n_{\beta\tilde{\alpha}} \delta^{\tilde{\alpha}}_{[K} \delta^n_{L]} -$$
$$- \nu_n^\alpha \varepsilon_p^0 \Lambda^p_{\beta\tilde{A}} \delta^{\tilde{A}}_{[K} \delta^n_{L]} - \nu_n^\alpha \varepsilon_i^0 \Lambda^i_{\beta\tilde{v}} \delta^{\tilde{v}}_{[K} \delta^n_{L]} - \nu_n^\alpha \nu_n^\gamma \Lambda^n_{\beta\tilde{\varepsilon}} \Lambda^n_{\gamma\tilde{\eta}} \delta^{\tilde{\varepsilon}}_{[K} \delta^{\tilde{\eta}}_{L]},$$

$$\mathcal{T}^0_{\alpha KL} = \Lambda^n_{\alpha\tilde{\beta}} \delta^{\tilde{\beta}}_{[K} \varepsilon^0_{|n|L]} - \varepsilon_n^0 \Lambda^n_{\alpha\tilde{\gamma}[K} \delta^{\tilde{\gamma}}_{L]} - \varepsilon_p^0 \Lambda^p_{\alpha\tilde{A}[K} \delta^{\tilde{A}}_{L]} - \varepsilon_i^0 \Lambda^i_{\alpha\tilde{v}[K} \delta^{\tilde{v}}_{L]} -$$
$$- \Lambda^p_{\alpha\tilde{A}} \varepsilon^0_{p[K} \delta^{\tilde{A}}_{L]} - \Lambda^i_{\alpha\tilde{v}} \varepsilon^0_{i[K} \delta^{\tilde{v}}_{L]} - \varepsilon_n^0 \varepsilon_n^0 \Lambda^n_{\alpha\tilde{\beta}} \delta^{\tilde{\beta}}_{[K} \delta^n_{L]} - \varepsilon_p^0 \varepsilon_n^0 \Lambda^p_{\alpha\tilde{A}} \delta^{\tilde{A}}_{[K} \delta^n_{L]} -$$
$$- \varepsilon_i^0 \varepsilon_n^0 \Lambda^i_{\alpha\tilde{v}} \delta^{\tilde{v}}_{[K} \delta^n_{L]} - \varepsilon_a^0 \varepsilon_n^0 \Lambda^n_{\alpha\tilde{\beta}} \delta^{\tilde{\beta}}_{[K} \delta^a_{L]} - \varepsilon_a^0 \varepsilon_p^0 \Lambda^p_{\alpha\tilde{A}} \delta^{\tilde{A}}_{[K} \delta^a_{L]} -$$
$$- \varepsilon_a^0 \varepsilon_i^0 \Lambda^i_{\alpha\tilde{v}} \delta^{\tilde{v}}_{[K} \delta^a_{L]} - \varepsilon_n^0 \nu_n^\gamma \Lambda^n_{\alpha\tilde{\beta}} \Lambda^n_{\gamma\tilde{\varepsilon}} \delta^{\tilde{\beta}}_{[K} \delta^{\tilde{\varepsilon}}_{L]} - \varepsilon_p^0 \nu_n^\gamma \Lambda^n_{\alpha\tilde{\beta}} \Lambda^n_{\gamma\tilde{A}} \delta^{\tilde{\beta}}_{[K} \delta^{\tilde{A}}_{L]} -$$
$$- \varepsilon_i^0 \nu_n^\gamma \Lambda^n_{\alpha\tilde{\beta}} \Lambda^i_{\gamma\tilde{v}} \delta^{\tilde{\beta}}_{[K} \delta^{\tilde{v}}_{L]}.$$

5. Рассмотрим систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\overline{\omega}^{\bar{J}}_{\bar{K}}$:

$$\begin{gathered}
\overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - S_K \omega^K_0,\ \overline{\omega}^p_0 = \omega^p_0 + \Lambda^{pq}_n \Lambda^n_{q\tilde{v}} \omega^{\tilde{v}}_0,\ \overline{\omega}^i_0 = \omega^i_0 + \Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{j\tilde{\alpha}} \omega^{\tilde{\alpha}}_0, \\
\overline{\omega}^\alpha_0 = \omega^\alpha_0 + \Lambda^{\alpha\beta}_n \Lambda^n_{\beta n} \omega^n_0,\ \overline{\omega}^0_n = \omega^0_n,\ \overline{\omega}^p_n = -\Lambda^{pq}_n \omega^0_q,\ \overline{\omega}^j_n = -\Lambda^{ji}_n \omega^0_i, \\
\overline{\omega}^\beta_n = -\Lambda^{\beta\alpha}_n \omega^0_\alpha,\ \overline{\omega}^n_n = \omega^n_n - S_K \omega^K_0,\ \overline{\omega}^0_p = \Lambda^n_{qp} \omega^q_0,\ \overline{\omega}^i_p = -\Lambda^n_{qp} \Lambda^{ij}_n \omega^q_j, \\
\overline{\omega}^n_p = -\Lambda^n_{qp} \omega^q_0,\ \overline{\omega}^\alpha_p = -\Lambda^n_{qp} \Lambda^{\alpha\beta}_n \omega^q_\beta,\ \overline{\omega}^0_i = \Lambda^n_{ji} \omega^j_n,\ \overline{\omega}^p_i = -\Lambda^n_{ji} \Lambda^{pq}_n \omega^j_q, \\
\overline{\omega}^t_p = \omega^t_p + \Lambda^{tq}_n \Lambda^n_{qpK} \omega^K_0 - \delta^t_p S_K \omega^K_0,\ \overline{\omega}^j_i = \omega^j_i + \Lambda^{jl}_n \Lambda^n_{liK} \omega^K_0 - \delta^j_i S_K \omega^K_0, \\
\overline{\omega}^\alpha_i = -\Lambda^n_{ji} \Lambda^{\alpha\beta}_n \omega^j_\alpha,\ \overline{\omega}^n_i = -\Lambda^n_{ji} \omega^j_0,\ \overline{\omega}^0_\alpha = \Lambda^n_{\beta\alpha} \omega^\beta_n,\ \overline{\omega}^i_\alpha = -\Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{\beta\alpha} \omega^\beta_j, \\
\overline{\omega}^p_\alpha = -\Lambda^{pq}_n \Lambda^n_{\beta\alpha} \omega^\beta_q,\ \overline{\omega}^n_\alpha = -\Lambda^n_{\beta\alpha} \omega^\beta_0,\ \overline{\omega}^\beta_\alpha = \omega^\beta_\alpha + \Lambda^{\beta\gamma}_n \Lambda^n_{\gamma\alpha K} \omega^K_0 - \delta^\beta_\alpha S_K \omega^K_0.
\end{gathered} \tag{21}$$

Заметим, что формы (21) удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства P_n и задают инфинитезимальные перемещения тангенциального репера $\{\tau_{\bar{J}}\}$:

$$d\tau_{\bar{J}} = \overline{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{J}} \tau_{\bar{K}},$$

где

$$\tau_0=\rho[A_0,A_p,A_i,A_\alpha],\ \tau_n=\rho[A_n,A_p,A_i,A_\alpha],$$
$$\tau_p=\rho\sum_q\Lambda^n_{qp}[A_0,A_1,\ldots,A_{q-1},A_n,A_{q+1},\ldots,A_r;A_i,A_\alpha],$$
$$\tau_i=\rho\sum_j\Lambda^n_{ji}[A_0,A_p,A_{r+1},\ldots,A_{j-1},A_n,A_{j+1},\ldots,A_m;A_\alpha],$$
$$\tau_\alpha=\rho\sum_\beta\Lambda^n_{\beta\alpha}[A_0,A_p,A_i,A_{m+1},\ldots,A_{\beta-1},A_n,A_{\beta+1},\ldots,A_{n-1}],$$
$$\Lambda\overset{\text{def}}{=}\det\left\|\Lambda^n_{pq}\right\|\neq 0,\ L\overset{\text{def}}{=}\det\left\|\Lambda^n_{ij}\right\|\neq 0,\ E\overset{\text{def}}{=}\det\left\|\Lambda^n_{\alpha\beta}\right\|\neq 0,$$

$$\rho=\frac{1}{\sqrt[n+1]{S}},\ S=\det\left\|S_{\sigma\rho}\right\|=\Lambda\cdot L\cdot E\neq 0,\ S_K=\frac{1}{n+1}(\Lambda_K+L_K+E_K),$$
$$\nabla S_K+S_K\omega^0_0+\delta^\sigma_K\omega^0_\sigma-\Lambda^n_{\sigma K}\omega^\sigma_n\equiv 0.$$

В работе [5] доказано, что регулярное ($S\neq 0$) трехсоставное распределение

$$\mathscr{TH}\subset P_n$$

во второй дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует проективное пространство $\overline{P}_n$, двойственное исходному проективному пространству P_n относительно инволютивного преобразования $\mathfrak{P}$ форм $\omega^{\overline{J}}_{\overline{K}}$ по закону (21). Данное утверждение справедливо и для $\mathscr{SH}$-распределения — частного класса трехсоставных $\mathscr{TH}$-распределений [6].

Дифференциальные уравнения геометрического образа

$$\overline{\mathscr{SH}}\subset\overline{P}_n,$$

двойственного данному $\mathscr{SH}$-распределению (1), (2) пространства P_n, имеют вид (без соответствующих замыканий)

$$\begin{aligned}&\overline{\omega}^n_p=\overline{\Lambda}^n_{p\tilde{q}}\overline{\omega}^{\tilde{q}}_0,\ \overline{\omega}^n_i=\overline{\Lambda}^n_{i\tilde{j}}\overline{\omega}^{\tilde{j}}_0,\ \overline{\omega}^n_\alpha=\overline{\Lambda}^n_{\alpha\tilde{\beta}}\overline{\omega}^{\tilde{\beta}}_0,\\&\overline{\omega}^\alpha_p=\overline{\Lambda}^\alpha_{p\tilde{A}}\overline{\omega}^{\tilde{A}}_0,\ \overline{\omega}^i_p=\overline{\Lambda}^i_{p\tilde{a}}\overline{\omega}^{\tilde{a}}_0,\ \overline{\omega}^\alpha_i=\overline{\Lambda}^\alpha_{i\tilde{v}}\overline{\omega}^{\tilde{v}}_0,\\&\overline{\omega}^p_\alpha=\overline{\Lambda}^p_{\alpha\tilde{A}}\overline{\omega}^{\tilde{A}}_0,\ \overline{\omega}^p_i=\overline{\Lambda}^p_{i\tilde{a}}\overline{\omega}^{\tilde{a}}_0,\ \overline{\omega}^i_\alpha=\overline{\Lambda}^i_{\alpha\tilde{v}}\overline{\omega}^{\tilde{v}}_0.\end{aligned}\tag{22}$$

Каждая из систем величин [5; 6]

$$\begin{aligned}&\overline{\nu}^n_p=-\Lambda^{pq}_n\nu^0_q,\ \overline{\nu}^\alpha_n=-\Lambda^{\alpha\beta}_n\nu^0_\beta,\ \overline{\nu}^i_n=-\Lambda^{ik}_n\nu^0_k,\\&\overline{\nu}^0_i=\Lambda^n_{ki}\nu^k_n,\ \overline{\nu}^0_p=\Lambda^n_{qp}\nu^q_n,\ \overline{\nu}^0_\alpha=\Lambda^n_{\beta\alpha}\nu^\beta_n\end{aligned}\tag{23}$$

образует квазитензор, двойственный соответствующему квазитензору $\mathscr{SH}$-распределения относительно преобразования $\mathfrak{P}$ (21).

Следуя работе [7], укажем способ построения двойственных проективных связностей относительно инволютивного преобразования $\mathfrak{P}$ (21). Строим, например, охват объекта проективной связности

$$\{\overline{\Gamma}^{\overline{p}}_{\overline{q}K}\overset{\text{def}}{=}\Pi^{\overline{p}}_{\overline{q}K}\}$$

двойственного образа

$$\overline{\mathcal{SH}} \subset \overline{P}_n,$$

аналогичный охвату объекта $\{\Gamma^{\bar{p}}_{\bar{q}K}\}$ (для величин $\{\overline{\Gamma}^{\bar{p}}_{\bar{q}K}\}$ входящие в них формы и функции пишутся с черточкой сверху). После чего по закону $\mathfrak{P}$ (21), учитывая при этом формулы (22), (23), находим охват объекта проективной связности $\{\Pi^{\bar{p}}_{\bar{q}K}\}$ — двойственного образа объекта $\{\Gamma^{\bar{p}}_{\bar{q}K}\}$.

Системы форм

$$\{\overline{\Psi}^{\bar{p}}_{\bar{q}}\}, \{\overline{\theta}^{\tilde{i}}_{\tilde{j}}\}, \{\overline{\vartheta}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}\},$$

построенные по законам соответственно вида (9), (16), (20) (в этом случае входящие в них формы и функции пишутся с черточкой сверху), удовлетворяют (каждая) структурным уравнениям Картана — Лаптева и определяют соответственно пространства

$$\overline{P}_{n,r}, \overline{P}_{n,s}, \overline{P}_{n,n-m-1}$$

с линейной связностью проективного вида, двойственные соответствующим пространствам

$$P_{n,r}, P_{n,s}, P_{n,n-m-1}.$$

Список литературы

1. *Попов Ю. И.* Сильно сопряженные трехсоставные распределения проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 1. С. 5—18.
2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Московского математического общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.
3. *Лаптев Г. Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюзного математического съезда. 1961. Т. 2. С. 226—233.
4. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. Геом. семинара. ВИНИТИ АН СССР. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.
5. *Попов Ю. И.* Трехсоставные регулярные распределения $H^r_{m,n-1}$ проективного пространства. Калининград, 1982. Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 декабря 1982 г., № 6192-82 Деп.
6. *Попов Ю. И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. СПб., 1992.
7. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1992.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

About the author

Dr Juriy Popov, prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru