УДК 514.75

Ю. И. Попов [1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
yurij.popoff2015@yandex.ru

Нормализация Фосса основных структурных подрасслоений *SH*-распределения аффинного пространства

Выяснена геометрическая интерпретация построенных нормализаций Фосса основных структурных подрасслоений скомпонованного гиперплоскостного распределения аффинного пространства.

Ключевые слова: распределение подрасслоения, фокальная гиперплоскость, фокальный гиперконус, биекция Бомпьяни — Пантази.

В статье использована следующая схема индексов:

$$I, J, K = \overline{1, n};\ i, j, k = \overline{1, m};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1};$$
$$\hat{\alpha} = \overline{m+1, n};\ \ \sigma, \rho, \tau = \overline{1, n-1}.$$

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному реперу $R = \{M, \vec{e}_I\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$dM = \omega^I \vec{e}_I,\ d\vec{e}_I = \omega_I^J \vec{e}_J, \tag{1}$$

а инвариантные формы ω^I и ω_J^I аффинной группы преобразований удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I. \tag{2}$$

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

Присоединим подвижной репер $R = \{M, \vec{e}_I\}$ пространства A_n к скомпонованному гиперплоскостному распределению [1] (в дальнейшем — *SH*-распределение) в каждом его центре $\mathscr{A}$ следующим образом:

$$M \equiv \mathscr{A}, \ \{\vec{e}_i\} \subset \Lambda(\mathscr{A}), \{\vec{e}_\alpha\} \subset L(\mathscr{A}), \vec{e}_n \notin H_{n-1}(\mathscr{A}).$$

Известно [1], что в выбранном репере нулевого порядка R_0 *SH*-распределение задается следующим образом:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K, \ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K, \ \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega^K, \ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega^K,$$
$$\nabla \Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \ \nabla \Lambda_{\alpha K}^n = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L, \ \nabla \Lambda_{iK}^\alpha + \Lambda_{iK}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{iKL}^\alpha \omega^L, \quad (3)$$
$$\nabla \Lambda_{\alpha K}^i + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_n^i = \Lambda_{\alpha KL}^i \omega^L,$$

где $\Gamma_1 = \{\Lambda_{iK}^n, \Lambda_{\alpha K}^n, \Lambda_{iK}^\alpha, \Lambda_{\alpha K}^i\}, \ \Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda_{iKL}^n, \Lambda_{\alpha KL}^n, \Lambda_{iKL}^\alpha, \Lambda_{\alpha KL}^i\}, \ldots$ — последовательность фундаментальных геометрических объектов [2] *SH*-распределения.

Для невырожденных несимметрических фундаментальных тензоров $\{\Lambda_{ij}^n\}, \{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}, \{\Lambda_{\sigma\rho}^n\}$ 1-го порядка введем обращенные тензоры $\{\Lambda_n^{ij}\}, \{\Lambda_n^{\alpha\beta}\}, \{\Lambda_n^{\sigma\rho}\}$, компоненты которых удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda_n^{ij} \Lambda_{jk}^n = \Lambda_n^{ji} \Lambda_{kj}^n = \delta_k^i, \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta\gamma}^n = \Lambda_n^{\beta\alpha} \Lambda_{\gamma\beta}^n = \delta_\gamma^\alpha,$$
$$\Lambda_n^{\sigma\rho} \Lambda_{\rho\tau}^n = \Lambda_n^{\rho\sigma} \Lambda_{\tau\rho}^n = \delta_\tau^\sigma$$

и, соответственно, уравнениям

$$\nabla \Lambda_n^{ij} \equiv 0, \ \nabla \Lambda_n^{\alpha\beta} \equiv 0, \ \nabla \Lambda_n^{\sigma\rho} \equiv 0.$$

2. Следуя работе [3], назовем *фокальной гиперплоскостью Λ-подрасслоения* в центре $\mathscr{A}$ данного *SH*-распределения всякую гиперплоскость $\zeta(\mathscr{A})$, которая содержит две бесконечно близкие плоскости Λ-подрасслоения при смещении центра $\mathscr{A}$ вдоль произвольной интегральной кривой Λ-подрасслоения.

Поскольку $\Lambda(\mathscr{A})\subset\zeta(\mathscr{A})$, то уравнение гиперплоскости $\zeta(\mathscr{A})$ в локальном репере R_0 ищем в виде

$$\zeta_\alpha x^\alpha + \zeta_n x^n = 0. \tag{4}$$

Из (1—3) следует, что

$$d\,A\big|_{\omega^{\hat\alpha}=0} = \omega^i e_i,\ d\vec e_i\big|_{\omega^{\hat\alpha}=0} = \omega_i^j \vec e_j + \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j \vec e_\alpha + \Lambda_{ij}^n \omega^j \vec e_n. \tag{5}$$

В силу (4), (5) для искомых интегральных кривых Λ-подрасслоения выполняются соотношения

$$\omega^\alpha = \omega^n = 0,\ \left(\zeta_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha + \zeta_n \Lambda_{ij}^n\right)\omega^j = 0. \tag{6}$$

Система (6) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\det\left\|\zeta_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha + \zeta_n \Lambda_{ij}^n\right\| = 0. \tag{7}$$

Таким образом, уравнение (7) определяет геометрическое место фокальных гиперплоскостей — *фокальный гиперконус класса m* [3], вершина которого есть m-плоскость $\Lambda(\mathscr{A})$.

Линейной полярой гиперплоскости $H(\mathscr{A})$ [4] относительно фокального гиперконуса (7) является связка гиперплоскостей

$$\zeta_n + \tfrac{1}{m}\Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_n^{ji}\zeta_\alpha = 0,$$

которую, согласно (4), представим в виде

$$\left(x^\alpha - \Phi_n^\alpha x^n\right)\zeta_\alpha = 0, \tag{8}$$

где

$$\Phi_n^\alpha = \tfrac{1}{m}\Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_n^{ji},\ \nabla\Phi_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \Phi_{nK}^\alpha \omega^K. \tag{9}$$

Все гиперплоскости связки (8) пересекаются по $(m+1)$-плоскости

$$\Phi_{m+1}(\mathscr{A}) = \left[\mathscr{A}; \vec e_i, \vec e_n + \Phi_n^\alpha \vec e_\alpha\right], \tag{10}$$

которую и будем называть *линейной полярой гиперплоскости* $H(\mathscr{A})$ [4] относительно фокального гиперконуса (7). В локальном репере $R_0(\mathscr{A})$ плоскость $\Phi_{m+1}(\mathscr{A})$ (10) задается уравнениями

$$x^{\alpha} = \Phi_n^{\alpha} x^n .$$

Поле квазитензора $\{\Phi_n^{\alpha}\}$ (9) 1-го порядка задает поле нормалей Φ_{m+1} 1-го рода L-подрасслоения.

3. Аналогичные построения (см. п. 2) проведем для L-подрасслоения данного *SH*-распределения. Уравнение искомой фокальной гиперплоскости $\eta(\mathscr{A})$ L-подрасслоения в локальном репере R_0 зададим следующим образом:

$$\eta_i x^i + \zeta_n x^n = 0 . \tag{11}$$

Геометрическое место фокальных гиперплоскостей $\eta(\mathscr{A})$ (11) L-подрасслоения — фокальный гиперконус класса $(n - m - 1)$, вершиной которого служит плоскость $L(\mathscr{A})$, — представим в виде

$$\det\left\|\eta_n \Lambda_{\alpha\beta}^n + \eta_i \Lambda_{\alpha\beta}^i\right\| = 0 . \tag{12}$$

Линейной полярой гиперплоскости $H(\mathscr{A})$ относительно гиперконуса (14) является связка гиперплоскостей

$$\left(x^i - \tfrac{1}{n-m-1} \Lambda_{\alpha\beta}^i \Lambda_n^{\beta\alpha} x^n\right)\eta_i = 0 ,$$

которая задает $(n - m)$-плоскость

$$\Phi_{n-m}(\mathscr{A}) = \left[\mathscr{A}; \vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_n + \Phi_n^i \vec{e}_i\right], \tag{13}$$

где

$$\Phi_n^i = \tfrac{1}{n-m-1} \Lambda_{\alpha\beta}^i \Lambda_n^{\beta\alpha},\ \nabla \Phi_n^i + \omega_n^i = \Phi_{nK}^i \omega^K . \tag{14}$$

Итак, поле квазитензора $\{\Phi_n^i\}$ (14) 1-го порядка задает поле нормалей $\Phi_{n-m}(\mathscr{A})$ (13) 1-го рода Λ-подрасслоения.

Плоскости (10) и (13) пересекаются в каждом центре $\mathscr{A}$ по прямой

$$\Phi_1(\mathscr{A}) = \Phi_{m+1}(\mathscr{A}) \cap \Phi_{n-m}(\mathscr{A}),\ \overrightarrow{\Phi_1}(\mathscr{A}) = \vec{e}_n + \Phi_n^{\sigma}\vec{e}_{\sigma}\,, \quad (15)$$

где

$$\Phi_n^{\sigma} = \left\{\Phi_n^{\alpha}, \Phi_n^{i}\right\},\ \nabla\Phi_n^{\sigma} + \omega_n^{\sigma} = \Phi_{nK}^{\sigma}\omega^K\,. \quad (16)$$

Следуя работам [5; 6], прямую $\Phi_1(\mathscr{A})$ (15) и плоскости $\Phi_{m+1}(\mathscr{A})$ (10), $\Phi_{n-m}(\mathscr{A})$ (13) назовем прямой Фосса и нормалями Фосса 1-го рода в смысле Нордена [7] соответственно Н-, L-, Λ-подрасслоений данного *SH*-распределения.

В силу биекций Бомпьяни — Пантази [1] полям нормалей Фосса $\left\{\Phi_n^{i}\right\}, \left\{\Phi_n^{\alpha}\right\}, \left\{\Phi_n^{\sigma}\right\}$ 1-го рода поставим в соответствие поля нормалей 2-го рода Λ-, L-, Н-подрасслоений $\left\{\Phi_i\right\}, \left\{\Phi_{\alpha}\right\}, \left\{\Phi_{\sigma}\right\}$:

$$\begin{gathered}\Phi_i = \Lambda_{ij}^n\Phi_n^j + \mathscr{T}_i,\ \nabla\Phi_i = \Phi_{iK}\omega^K,\\ \Phi_{\alpha} = \Lambda_{\alpha\beta}^n\Phi_n^{\beta} + \mathscr{T}_{\alpha},\ \nabla\Phi_{\alpha} = \Phi_{\alpha K}\omega^K,\\ \Phi_{\sigma} = \Lambda_{\sigma\rho}^n\Phi_n^{\rho} + t_{\sigma},\ \nabla\Phi_{\sigma} = \Phi_{\sigma K}\omega^K,\end{gathered} \quad (17)$$

где

$$\begin{gathered}\mathscr{T}_i \overset{def}{=} t_i + \Lambda_{i\alpha}^n t_n^{\alpha},\ \nabla\mathscr{T}_i \equiv \Lambda_{ij}^n\omega_n^j,\\ \mathscr{T}_{\alpha} \overset{def}{=} t_{\alpha} + \Lambda_{\alpha j}^n t_n^j,\ \nabla\mathscr{T}_{\alpha} \equiv \Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_n^{\beta},\\ t_{\sigma} \overset{def}{=} \Lambda_{\sigma n}^n,\ \nabla t_{\sigma} = \Lambda_{\sigma\rho}^n\omega_n^{\rho} + t_{\sigma K}\omega^K,\\ t_n^{\alpha} \overset{def}{=} -\Lambda_n^{\alpha\beta}t_{\beta} - \Lambda_n^{\alpha i}t_i,\ \nabla t_n^{\alpha} + \omega_n^{\alpha} = t_{nK}^{\alpha}\omega^K,\\ t_n^i \overset{def}{=} -\Lambda_n^{ij}t_j - \Lambda_n^{i\alpha}t_{\alpha},\ \nabla t_n^i + \omega_n^i = t_{nK}^i\omega^K.\end{gathered}$$

Поля нормалей (17) назовем полями нормалей Фосса 2-го рода Λ-, L-, Н-подрасслоений данного *SH*-распределения.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Нормаль Фосса $\Phi_1(\mathscr{A})$ SH-распределения в каждом центре $\mathscr{A}$ есть пересечение линейных поляр гиперплоскости $H(\mathscr{A})$ относительно фокальных гиперконусов (7) и (12) соответственно Λ-, L-подрасслоений. SH-распределение* *внутренним инвариантным образом порождает нормализации Фосса* $\left(\Phi_n^i;\Phi_i\right)$, $\left(\Phi_n^\alpha;\Phi_\alpha\right)$, $\left(\Phi_n^\sigma;\Phi_\sigma\right)$ *соответственно Λ-, L-, H-подрасслоений в дифференциальной окрестности 1-го порядка.*

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Скомпонованные гиперплоскостные распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2018. № 2. С. 5—18.

2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Акивис М.А.* Фокальные образы поверхностей ранга *r* // Изв. вузов. Матем. 1957. № 1. С. 9—19.

4. *Ивлев Е.Т., Лучинин А.А.* О полярном соответствии относительно алгебраической поверхности и его приложениях // Геом. сб. 1968. Вып. 7. С. 23—24.

5. *Акивис М.А.* О нормалях Фосса поверхности, несущей сеть сопряженных линий // Матем. сб. 1962. Т. 58:2. С. 695—706.

6. *Благонравов В.В.* Распределения на гиперповерхности аффинного пространства // Деп. В ВИНИТИ. 17.08.1982. № 4552—82.

7. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

Yu. Popov[1]

[1] Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo ul., Kaliningrad, 236016, Russia
yurij.popoff2015@yandex.ru

The Foss normalization for main structural subbundles of the SH-distribution in affine space

Submitted on May 24, 2018

Geometric interpretation of Foss normalizations constructed for the main structural subbundles of compiled hyperplane distribution is found in affine space.

Keywords: distribution of subbundle, focal hyperplane, focal hypercone, bijection of Bompiani — Pantazi.

References

1. *Popov, Yu. I.:* Composed hyperplane distributions of affine space. IKBFU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and technology. Kaliningrad. 2, 5—18 (2018) (in Russian).

2. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs. GITTL, Moscow. 2, 275—382 (1953) (in Russian).

3. *Akivis, M. A.:* Focal maps of a surface of rank *r*. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1, 9—19 (1957) (in Russian).

4. *Ivlev, E. T., Luchinin, A. A.:* On the polar correspondence with respect to an algebraic surface and its applications, Geom. Sb. Tomsk. 7, 23—24 (1968) (in Russian).

5. *Akivis, M. A.:* On the Voss normals of a surface carrying a net of conjugate lines, Mat. Sb. (N. S.), **58**(100):2, 695—706 (1962) (in Russian).

6. *Blagonravov, V. V.:* Distributions on the hypersurface of an affine space. VINITI, 08/17/1982. No. 4552—82 (in Russian).

7. *Norden, A. P.:* Spaces with an affine connection. Nauka, Moscow (1976) (in Russian).