груэнции пар фигур $F=\{F_1, F_2\}$, где F_1 -центральная коника, а F_2 - плоскость, не параллельная плоскости коники F_1.

Обозначим через C центр коники F_1, через ℓ - линию пересечения плоскости коники F_1 с плоскостью F_2, через L - точку пересечения диаметра коники F_1, сопряженного прямой ℓ относительно F_1, с прямой ℓ.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией M назовем конгруэнцию пар фигур F, для которой все коники F_1 конгруэнции (F_1) принадлежат квадрике Q, имеющей центр в точке C и являющейся огибающей плоскостей F_2.

Исследования проводятся в каноническом репере $R=\{A, \bar{e}_\alpha\}$ $(\alpha=1,2,3)$, вершина A которого совмещена с центром C коники F_1, вектор $\bar{e}_1$ параллелен ℓ, $\bar{e}_2$ сопряжен $\bar{e}_1$ относительно коники F_1. Концы E_i векторов $\bar{e}_i$ $(i=1,2)$ расположены на конике F_1, а конец E_3 вектора $\bar{e}_3$ - в характеристической точке плоскости F_2. Обозначим $\bar{E}'_\alpha=\bar{A}-\bar{e}_\alpha$.

Уравнения коники F_1, квадрики Q и система уравнений Пфаффа конгруэнции M имеют соответственно вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-1=0, \qquad x^3=0, \tag{I}$$

$$Q \equiv (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+x^2x^3-1=0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \omega^1=\omega^2=\omega^3=\omega_1^1=0, & 2\omega_2^2=-2\omega_3^3=-\omega_2^3=\Omega^2, \\ \omega_1^2=-2\Omega^1-2\omega_1^3, & 2\omega_2^1=4\Omega^1+3\omega_1^2, \\ \omega_1^3=\Gamma_{11}^3\Omega^1+\Gamma_{12}^3\Omega^2. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь формы $\Omega^i=\omega_3^i$ выбраны за независимые формы конгруэнции M.

Анализируя систему уравнений (3), заключаем, что конгруэнции M существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Доказано, что конгруэнции M обладают следующими геометрическими свойствами :

I) прямолинейная конгруэнция (E_2E_3) и конгруэнция координатных плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ тогда и только тогда односторонне аффинно расслояемы, когда точка E_1 (E'_1) описывает линию;

2) поверхность (L) тогда и только тогда вырождается в линию, когда точка L является сдвоенным фокусом прямой ℓ конгруэнции (ℓ);

3) на квадрике Q касательная вдоль координатной линии $\Omega^1=0$ в точке E_3 параллельна вектору $\overline{E_3L}$, а вдоль $\Omega^2=0$ - вектору $\bar{e}_1$;

4) касательная плоскость поверхности (L) в точке L принадлежит пучку плоскостей, образованному плоскостью коники F_1 и плоскостью F_2;

5) прямая, соединяющая характеристические точки граней $(E_1E_2E_3)$ и $(E'_1E_2E_3)$, параллельна диаметру $E_1E'_1$ коники F_1.

УДК 514.75

НОРМАЛИ ВТОРОГО РОДА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ЦЕНТРОВ МНОГООБРАЗИЯ ГИПЕРКВАДРИК

Е.П.Ю р о в а

(Калининградский государственный университет)

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается $(n-1)$-мерное многообразие V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик Q. В первой дифференциальной окрестности многообразия V_{n-1} для гиперповерхности C центров гиперквадрик этого многообразия построены и геометрически охарактеризованы два поля инвариантных нормалей II рода. Найдена связь между особенностью взаимного расположения этих нормалей и фокальными точками определенного типа на Q.

Данная статья является продолжением работы [1], при этом используются обозначения и результаты последней. Индексы принимают следующие значения: $\alpha, \beta=\overline{1,n}$; $i,j=\overline{1,n-1}$.

Рассмотрим определенную и геометрически охарактеризованную в [1] числовую функцию $A(Q^*)$, где Q^* - гиперквадрика из некоторой области $\mathcal{D} \ni Q$ пространства $R(Q)$ гиперквадрик. В общем случае для многообразия V_{n-1} каждой гиперквадрике соответствует единственный центр. Пусть μ -определенное на гиперповерхности C центров гиперквадрик многообразия V_{n-1} отображение, которое каждой точке $P\in C$ ставит в соответствие гиперквадрику $Q \in V_{n-1}$, имеющую точку P своим центром.

Пусть $Q^* = \mu(P^*)$, где $P^* \in C$. Таким образом, на гиперповерхности C возникает числовая функция $\alpha(P^*) = A(\mu(P^*))$. Уравнение (I9) статьи [1] дает разложение функции α по степеням приращений ω^i координат точки $P^* = P + dP$, т.к. многообразие V_{n-1} гиперквадрик там параметризовано гиперповерхностью C.

Рассмотрим прямое произведение $A_n \times R$ как $(n+1)$-мерное аффинное пространство A_{n+1}. График числовой функции $\alpha(P^*)$ является $(n-1)$-мерной поверхностью $G \subset A_{n+1}$, которая проходит через точку $(P,1)$ и проектируется при проекции декартова произведения $A_n \times R \to A_n$ на гиперповерхность $C \subset A_n$. Уравнения касательной $(n-1)$-плоскости к поверхности G в точке $(P,1)$ в соответствии с (I9) [1] имеют вид

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2} b_i x^i, \quad x^n = 0, \qquad (I)$$

где $\alpha \in R$. Отсюда вытекает геометрический смысл плоскости b:

$$x^n = 0, \quad b_i x^i = 2 \qquad (2)$$

- нормали 2-го рода гиперповерхности C - это пересечение $(n-1)$-плоскости (I) с подпространством $A_n \times O$, где $O \in R$, пространства $A_n \times R$. Заметим, что нормаль b параллельна изученной ранее $(n-2)$-плоскости (2) [1].

Пусть T_Q - касательная гиперплоскость к гиперповерхности C в центре P гиперквадрики Q, а $Q^* \in V_{n-1}$ задается уравнением (3) [1]. Геометрически охарактеризованная в [1] гиперквадрика $\mathcal{L}(Q^*)$ имеет своим центром точку P, а координаты $\tilde{a}_{\alpha\beta}$ этой гиперквадрики определяются формулой (I4) [1]. Обозначим символом V^Q_{n-1} $(n-1)$-мерное многообразие гиперквадрики $\mathcal{L}(Q^*)$. Пусть $q^* = T_Q \cap \mathcal{L}(Q^*)$. Это квадратичный элемент, лежащий в T_Q, определяемый системой

$$x^n = 0, \quad \tilde{a}_{ij} x^i x^j = 1. \qquad (3)$$

Из (I4) [1] при фиксации T_Q, обеспечивающей равенства $\omega^n_i = 0$, для q^* с точностью до величин первого порядка малости относительно ω^i получаем:

$$x^n = 0, \quad (a_{ij} + b_{ijk}\omega^k) x^i x^j = 1. \qquad (4)$$

В общем случае имеется $(n-1)$-мерное многообразие квадратичных элементов q^*.

Введем систему величин $\beta_i = a^{pq} b_{pqi}$. Повторяя для квадратичных элементов q^* рассуждение, проведенное для гиперквадрик в [1], приходим к числовой функции

$$\alpha_1 = 1 - \frac{1}{2} \beta_i \omega^i + \langle 2 \rangle \qquad (5)$$

Плоскость β:

$$x^n = 0, \quad \beta_i x^i = 2 \qquad (6)$$

- нормаль 2-го рода гиперповерхности C - интерпретируется аналогично нормали b с учетом замены гиперквадрик Q^* на квадратичные элементы q^*.

Заметим, что в нашем репере [1] выполняется: $a_{in} = 0$, откуда вытекает равенство $a^{in} = 0$. Условие совпадения нормалей β и b означает эквивалентность систем уравнений

$$(a^{pq} b_{pq,i} + a^{nn} b_{nn,i}) x^i = 2, \quad x^n = 0; \qquad (7)$$

$$a^{pq} b_{pqi} x^i = 2, \quad x^n = 0. \qquad (8)$$

Так как в силу $a_{nn} \neq 0$ имеем $a^{nn} \neq 0$, получаем условие совпадения нормалей β и b в виде: $b_{nni} = 0$.

Назовем вершинами гиперквадрики Q многообразия V_{n-1} (или многообразия V^Q_{n-1}) точки ее пересечения с прямой, направление которой сопряжено гиперплоскости T_Q. В нашем репере уравнения указанной прямой имеют вид: $x^i = 0$, откуда получаем координаты вершин гиперквадрики Q: $x^i = 0$, $x^n = \frac{1}{\pm\sqrt{a_{nn}}}$.

Близкая к гиперквадрике Q гиперквадрика многообразия V^Q_{n-1} с точностью до I-го порядка малости относительно ω^i определяется уравнением:

$$(a_{ij} + b_{ijk}\omega^k) x^i x^j + 2 b_{ink} \omega^k x^i x^n + (a_{nn} + b_{nnk}\omega^k)(x^n)^2 = 1, \qquad (9)$$

из которого вытекает, что при $b_{nnk} = 0$ эта гиперквадрика содержит вершины гиперквадрики Q. Тем самым доказана

Т е о р е м а. Если нормали 2-го рода b и β гиперповерхности центров совпадают, то вершины гиперквадрики Q являются ее фокальными точками как элемента многообразия V^Q_{n-1}.

Библиографический список

I. С о п и н а Е.П. Об инвариантных образах, ассоциированных с конгруэнцией центральных невырожденных гиперквадрик // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып.I7. С.83-86.