УДК 530.145.82

А. И. Иванов, С. Г. Шпилевая

О КВАНТОВЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Поступила в редакцию 11.05.2021 г.
Рецензия от 20.05.2021 г.

Разрабатывается методика изучения проблематики квантовых вычислений, осваиваемая учащимися в рамках программ высшего образования. На примере двухкубитовой квантовой цепи, осуществляющей унитарное преобразование U вида $|x,y\rangle \to |x, y \oplus f(x)\rangle$, *обсуждается проблема факторизации суперпозиционного состояния на выходе цепи. Представленный подход будет полезным при изучении тем, касающихся использования квантового параллелизма в процедуре вычислений.*

The article is devoted to the development of a methodology for studying the problems of quantum computing, mastered by students in the framework of higher education programs. On the example of a two-qubit quantum circuit performing a unitary transformation U of the form $|x,y\rangle \to |x, y \oplus f(x)\rangle$, *the problem of factorization of the superposition state at the output of the circuit is discussed. The presented approach will be useful in studying topics related to the use of quantum parallelism in the calculation procedure.*

Ключевые слова: квантовый параллелизм, кубит, факторизация состояний, двухкубитовый гейт, вычислительный базис

Keywords: quantum parallelism, qubit, state factorization, two-qubit gate, computational basis

Как известно, квантовый параллелизм, лежащий в основе функционирования квантовых компьютеров [1—4] и позволяющий им потенциально превзойти классические вычислительные системы, дает возможность определять функцию *f*(x) для различных значений аргумента одновременно. Обычно для иллюстрации квантового параллелизма рассматривается вычисление функции от битовой переменной x, результатом которого является битовое значение:

$$f(x): \{0;1\} \to \{0;1\}.$$

В большинстве учебных пособий, затрагивающих данную проблематику (например, [5; 6]), распространенным способом демонстрации квантового параллелизма при вычислении данной функции является рассмотрение модели двухкубитового квантового компьютера, который оперирует с состоянием $|x,y\rangle$. Используя подходящую последовательность гейтов, можно преобразовать исходное состояние $|x,y\rangle$ в состояние $|x, y \oplus f(x)\rangle$.

Пример такой двухкубитовой квантовой цепи, осуществляющей унитарное преобразование U вида $|x,y\rangle \to |x, y\oplus f(x)\rangle$, удобно представить схемой, изображенной на рисунке 1.

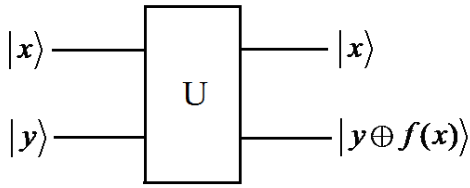

Рис. 1. Двухкубитовая квантовая цепь, осуществляющая унитарное преобразование $|x,y\rangle \to |x, y\oplus f(x)\rangle$

Если в двухкубитовой цепи положить y = 0, другими словами, если на вход подается состояние $|x,0\rangle = |x\rangle \otimes |0\rangle$, то цепь будет осуществлять преобразование $|x,0\rangle \to |x, f(x)\rangle$ (рис. 2). Соответственно, состояние на выходе цепи $|x, f(x)\rangle = |x\rangle \otimes |f(x)\rangle$ имеет такой вид, что состояние второго кубита в этом случае определяет значение вычисляемой функции *f*(*x*).

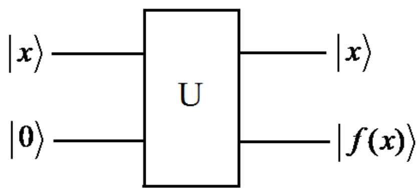

Рис. 2. Двухкубитовая квантовая цепь, осуществляющая унитарное преобразование $|x,0\rangle \to |x, f(x)\rangle$

Из анализа цепи, приведенной на рисунке 2, становится очевидным, что если x = 0 $(|x\rangle = |0\rangle)$ или x = 1 $(|x\rangle = |1\rangle)$, то схема ведет себя как классический компьютер, выдающий значение f(x).

Далее рассмотрим двухкубитовую квантовую цепь (рис. 3), где действием гейта Адамара [7] на состояние $|0\rangle$ создается суперпозиция $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, которая подается на вход «черного ящика» U.

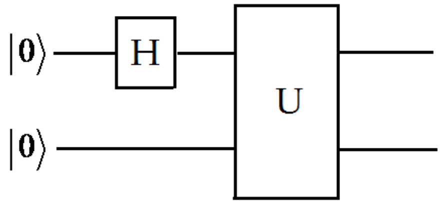

Рис. 3. Двухкубитовая квантовая цепь, осуществляющая унитарное преобразование
$|0,0\rangle \to |0, f(0)\rangle/\sqrt{2} + |1, f(1)\rangle/\sqrt{2}$

В результате действия унитарного преобразования U состояние на выходе цепи будет иметь вид

$$|0, f(0)\rangle / \sqrt{2} + |1, f(1)\rangle / \sqrt{2}.$$

Таким образом, состояние на выходе содержит информацию и о значении $f(0)$, и о значении $f(1)$. Это свойство и обозначается в квантовых вычислениях как квантовый параллелизм [1—4].

Итак, в отличие от организации параллельных вычислений в классических компьютерах, когда технически создается несколько параллельных цепей, производящих вычисления одновременно, в квантовом компьютере эта процедура осуществляется в одной цепи на суперпозиции состояний.

Тем не менее не все следствия квантового параллелизма могут быть легко реализованы из-за особенностей процедуры квантового измерения. В учебном пособии [1], в частности, указано, что «оно не позволяет извлечь все значения вычисляемой функции». Именно поэтому отмечается, что такой параллелизм оказывается не очень-то полезным. Обсудим возникающие проблемы более подробно.

Прежде всего заметим, что если $f(x)$ — однозначная функция, то получить информацию как об $f(0)$, так и об $f(1)$ из суперпозиционного состояния $|0, f(0)\rangle / \sqrt{2} + |1, f(1)\rangle / \sqrt{2}$ в приведенном выше примере можно путем проектирования его на однокубитовые состояния $|0\rangle, |1\rangle$ и двухкубитовые состояния Белла:

$$|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}, \quad |\Psi^+\rangle = (|01\rangle + |10\rangle) / \sqrt{2}.$$

Действительно, такая возможность имеется, что следует из таблицы 1, в которой представлена связь возможных значений $f(0)$ и $f(1)$ с состояниями на выходе рассматриваемой квантовой цепи.

Таблица 1

Связь возможных значений $f(0)$ и $f(1)$ с состояниями на выходе двухкубитовой квантовой цепи

$f(0)$	$f(1)$	Состояние
0	0	$\|\Omega\rangle = (\|0\rangle + \|1\rangle)\|0\rangle / \sqrt{2}$
0	1	$\|\Phi^+\rangle = (\|00\rangle + \|11\rangle) / \sqrt{2}$
1	0	$\|\Psi^+\rangle = (\|01\rangle + \|10\rangle) / \sqrt{2}$
1	1	$\|\Theta\rangle = (\|0\rangle + \|1\rangle)\|1\rangle / \sqrt{2}$

Однако практически такую возможность реализовать не удается из-за сложностей, связанных с измерением максимально запутанных состояний Белла. Технические проблемы, возникающие при анализе фотонных состояний Белла, рассмотрены, например, в [5].

С этой точки зрения оптимален вариант, при котором вычисление будет приводить к состояниям, являющимся факторизованными по отдельным кубитам (как, например, в [7]). Действительно, в этом случае измерения можно проводить последовательно над каждым кубитом, не возмущая остальные кубиты. Более того, желательно, чтобы каждый кубит находился в одном из двух состояний вычислительного базиса.

Факторизации выходного состояния в рассматриваемой квантовой цепи можно добиться, добавив к ней на выходе двухкубитовый гейт Controlled Not (CNOT или *XOR*) (рис. 4).

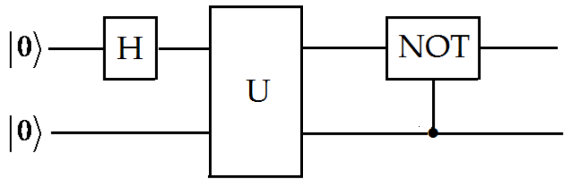

Рис. 4. Двухкубитовая квантовая цепь,
осуществляющая унитарное преобразование U
с факторизацией состояния на выходе

Действительно, состояния $|\Omega\rangle$ и $|\Theta\rangle$ уже факторизованы и не изменятся при таком включении гейта CNOT. В то же время под действием гейта CNOT состояние $|\Phi^{+}\rangle$ факторизуется:

$$|\Phi^{+}\rangle \to |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Аналогичным образом под действием гейта CNOT факторизуется также и состояние $|\Psi^{+}\rangle$:

$$|\Psi^{+}\rangle \to |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

В заключение приведем таблицу 2, из которой следует связь факторизованных состояний на выходе двухкубитовой квантовой цепи с возможными значениями $f(0)$ и $f(1)$.

Таблица 2

Связь факторизованных состояний на выходе двухкубитовой квантовой цепи с возможными значениями $f(0)$ и $f(1)$

Состояние на выходе	$f(0)$	$f(1)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle + \|1\rangle) \otimes \|0\rangle$	0	0
$\|0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle + \|1\rangle)$	0	1
$\|1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle + \|1\rangle)$	1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle + \|1\rangle) \otimes \|1\rangle$	1	1

Представленный подход будет полезным при изучении тем, касающихся использования квантового параллелизма в вычислительных процедурах.

Список литературы

1. *Горбачев В.Н., Жилиба А.И.* Физические основы современных информационных процессов, или Учебное пособие по квантовой телепортации, квантовым вычислениям и другим вопросам квантовой информации. СПб. ; Тверь, 2001.

2. *Стин Э.* Квантовые вычисления. Ижевск, 2001.

3. *Прескилл Дж.* Квантовая информация и квантовые вычисления. Т. 2. Ижевск, 2011.

4. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовая информация и квантовые вычисления. М., 2006.

5. *Качаев И.А.* Квантовые вычисления. Протвино, 2001.

6. *Боумейстер Д., Экерт А., Цайлингер А.* Физика квантовой информации. М., 2002.

7. *Шпаковский Г.И.* Реализация параллельных вычислений: MPI, OpenMP, кластеры, грид, многоядерные процессоры, графические процессоры, квантовые компьютеры. Минск, 2011.

Об авторах

Алексей Иванович Иванов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: AIvanov@kantiana.ru

Светлана Геннадьевна Шпилевая — канд. пед. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

The authors

Prof. Aleksei I. Ivanov, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: AIvanov@kantiana.ru

Dr Svetlana G. Shpilevaya, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru