



А. А. Зайцев, С. Н. Иванов, А. В. Юдина

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПАРЫ ЦИКЛОН-АНТИЦИКЛОН
ВБЛИЗИ МОРСКОГО БЕРЕГА**

Рассмотрено взаимодействие пары циклон-антициклон с морским берегом. Получены уравнения динамики вихревой пары и законы сохранения. На их основе изучены особенности движения вихрей и предельные режимы.

The interaction of a pair a cyclone – an anticyclone with a sea shore is considered. The equations of dynamics of vertical pair conservation and laws of preservation are received. On their basis the features of movement of vortices and limiting regimes are investigated.

Ключевые слова: циклон, антициклон, взаимодействие, траектория, законы сохранения, течения.

Key words: cyclone, anticyclone, interaction, trajectory, conservation laws, flows.

Введение

В данной работе мы продолжаем изучение взаимодействия вихрей вблизи морского берега, которое начато в [1]. Здесь мы рассмотрим влияние берега на взаимодействие циклона и антициклона одинаковой интенсивности (вихревой дублет).

Известно [2], что в открытом море вихревой дублет движется поступательно вдоль линии, перпендикулярной отрезку, соединяющему центры вихрей, с постоянной скоростью, которая обратно пропорциональна расстоянию между вихрями. Отсюда следует, что близко расположенные вихри движутся очень быстро. На практике это может привести к неблагоприятным последствиям. Вблизи берега вихри создают отраженные течения, которые влияют на динамику самих вихрей. Это влияние полезно исследовать, что и делается в нашей работе. Как и в [1], мы используем методы теории функций комплексного переменного [3; 4].

Уравнение динамики вихревого дублета вблизи берега

Выберем систему координат так, чтобы береговая черта совпадала с координатной осью $y=0$.

Вихрь интенсивности k , расположенный в точке z_0 , создает течение, поле скоростей которого описывается формулой

$$V = -\frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0}. \tag{1}$$

Пусть вихревой дублет образован циклоном и антициклоном, интенсивности которых равны k и $-k$ соответственно. Обозначим их комплексные координаты z_1 и z_2 . Покажем, что отраженные течения могут рассматриваться как течения, создаваемые мнимыми антициклоном и циклоном, расположенными в симметричных точках \bar{z}_1 и \bar{z}_2 (рис. 1). В самом деле, используя формулу (1) и принцип суперпозиции, получаем следующее выражение для поля скоростей течения, создаваемого четверкой вихрей:

$$V = -\frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} + \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z - z_2} + \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z - \bar{z}_1} - \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z - \bar{z}_2}. \tag{2}$$

Вдоль береговой черты имеем

$$V = \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{x - z_1} - \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{x - z_1} - \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{x - z_2} + \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{x - z_2}.$$

В этом выражении каждая пара является суммой двух комплексно сопряженных величин, поэтому $\text{Im}V=0$. Так как $\text{Im}V$ является нормальной составляющей скорости, то условие

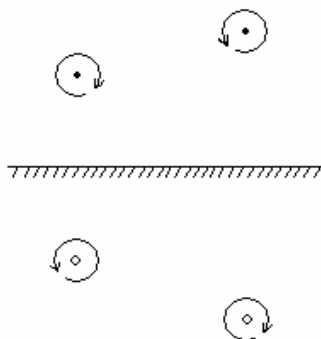


Рис. 1. Действительные и мнимые вихревые дублеты



непротекания на берегу выполняется и, значит, формула (2) действительно описывает поле скоростей течения, создаваемого вихревым дублетом вблизи берега.

Используя формулу (2) и известную методику вывода уравнений взаимодействия вихрей [1; 2], получаем следующую систему уравнений динамики дублета:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_1} - \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2}, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Законы сохранения

Можно убедиться, пользуясь обычной методикой, что система (3) допускает два закона сохранения

$$y_1 - y_2 = 2b, \quad (4)$$

$$\frac{|z_1 - z_2|^2 (z_1 - \bar{z}_1)(z_2 - \bar{z}_2)}{|z_1 - \bar{z}_2|^2} = -4a, \quad a > 0. \quad (5)$$

Соотношение (4) означает, что разность ординат вихрей является постоянной величиной. В процессе движения расстояние между вихрями меняется, но это связано с изменением разности абсцисс.

Случай расположения вихрей на одинаковом удалении от берега

В этом случае $b=0$. Тогда из соотношения (2) следует, что если в какой-то момент времени вихри были одинаково удалены от берега, то они будут одинаково удалены во все время движения, $y_2 = y_1 = y$.

Отделяя в уравнениях (3) действительные части, для абсцисс обоих вихрей получаем следующие уравнения:

$$\dot{x}_1 = \frac{k}{4\pi y} - \frac{ky}{\pi(x^2 + 4y^2)}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{4\pi y} + \frac{ky}{\pi(x^2 + 4y^2)}, \quad (6)$$

где $x = x_1 - x_2$. Из них следует, что составляющие скорости вдоль берега равны по величине и противоположны по направлению, поэтому траектории обоих вихрей симметричны друг другу относительно некоторой прямой, перпендикулярной берегу. Без потери общности можно считать эту прямую совпадающей с осью ординат.

Тогда $x_1 = x/2$, $x_2 = -x/2$. Соотношение (5) в данном случае сводится к равенству

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + 4y^2} = a.$$

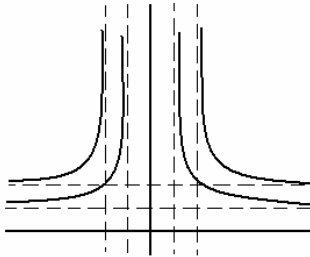


Рис. 2. Траектории вихревого дублета в случае равноудаленности от берега

Это есть уравнение однопараметрического семейства линий, выпуклых вниз и похожих на гиперболы (рис. 2). Они имеют горизонтальную асимптоту $y = \sqrt{a}$ и две вертикальные $x = \pm 2\sqrt{a}$.

Уравнения динамики (3) в данном случае сводятся к таким:

$$\dot{x} = \frac{kx^2}{2\pi y(x^2 + 4y^2)}, \quad \dot{y} = -\frac{2ky^2}{\pi(x^2 + 4y^2)}.$$

Из них получаем следующий результат. Если циклон расположен справа от антициклона, то вихри движутся по траекториям (рис. 2) в направлении к берегу и при этом расходятся. Когда расстояние между ними становится большим, они будут двигаться вдоль берега в противоположных направлениях.

Если циклон расположен слева от антициклона, то вихри удаляются от берега, но приближаются



друг к другу. Когда удаление от берега станет большим, то сближение прекращается и вихри движутся параллельно вдоль прямой, перпендикулярной к берегу.

Случай разной удаленности вихрей от берега

В этом случае соотношение (5) с учетом равенства (4) можно выразить в декартовых координатах вихрей следующим образом:

$$\frac{y_1(y_1 - 2b)(x^2 + 4b^2)}{x^2 + 4(y_1 - b)^2} = a, \quad y_2 = y_1 - 2b. \quad (7)$$

Анализ этого соотношения показывает, что возможны два случая движения вихрей. В первом случае вихревой дублет приближается к берегу, но при этом вихри движутся в противоположных направлениях. Когда они расходятся далеко, их движение будет параллельно берегу. Предельные расстояния до берега определяются из системы уравнений $y_2 = y_1 - 2b$, $y_1 y_2 = a$ (второе уравнение получается из соотношения (7) предельным переходом $x \rightarrow +\infty$). Решая их, получаем следующие значения для предельных расстояний:

$$y_1 = b + \sqrt{a + b^2}, \quad y_2 = -b + \sqrt{a + b^2}.$$

Во втором случае вихри удаляются от берега, сближаясь при этом до предельной дистанции $d = 2\sqrt{a}$. В данном случае циклон будет находиться слева, а антициклон справа. Полагая в соотношении (7) $y_1 \rightarrow +\infty$, получаем

$$x = x_1 - x_2 = -2\sqrt{a - b^2}.$$

Таким образом, необходимым условием ухода вихрей от берега является неравенство $a > b^2$. Удаляются вихри под углом $\alpha = \arctg(b / \sqrt{a - b^2})$.

Заключение

В работе выведены уравнения динамики вихревого дублета циклон-антициклон вблизи берега. Получено два закона сохранения. Определены условия приближения вихрей к берегу или удаления от него. В случае равноудаленности вихрей от берега найдено уравнение траекторий в явном виде. В общем случае определены характеристики предельного режима.

Список литературы

1. Зайцев А. А., Иванов С. Н., Юдина А. В. Взаимодействие антициклона с барьером // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Калининград, 2009. Вып. 4. С. 17–20.
2. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., 1964.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. М., 1973.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., 1973.

Об авторах

А. А. Зайцев — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., РГУ им. И. Канта.
С. Н. Иванов — канд. физ.-мат. наук, зав. лаб. морской метеорологии АО ИОРАН.
А. В. Юдина — студ., РГУ им. И. Канта.

Authors

A. Zaitsev — Dr., IKSUR.
S. Ivanov — Dr., Oceanology Institute of the Russian Academy of Sciences.
A. Yudina — student, IKSUR.