4. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М. ; Л., 1948.

N. Eliseeva

Hypersurface of projective space equipped with distributions

A hypersurface $\Omega_{n-1} \subset P_n$ with three strongest mutual subbundles is studied. The giving the hypersurface Ω_{n-1} in the 1st order frame is adduced and the existence theorem is proved. The geometrical interpretation of a holonomicity of the main structural distributions of hypersurface Ω_{n-1} is given.

УДК 514.75

В. П. Козяйкин
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Полные условия неподвижности точки и гиперплоскости в проективном пространстве

В проективном пространстве аналитическим аппаратом с условием проективности найдены полные уравнения стационарности точки и гиперплоскости. Показано, что при переходе к неоднородным координатам точки и неоднородному уравнению гиперплоскости появляются формы, характерные для другого аналитического аппарата проективного пространства.

Ключевые слова: проективное пространство, условия неподвижности точки, условия неподвижности гиперплоскости.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_I\}$ $(I,\ldots = 0,\ldots,n)$, инфинитезимальные перемещения которого определяются деривационными формулами

$$dA_I = \omega_I^J A_J. \qquad (1)$$

Формы Пфаффа ω_I^J удовлетворяют уравнениям структуры пространства P_n

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I \qquad (2)$$

и условию проективности

$$\omega_I^I = 0. \qquad (3)$$

Формулы (1)—(3) образуют первый аналитический аппарат [1 − 3] в проективном пространстве P_n.

1. Точка

Точка $M \in P_n$ определяется любой из соответствующих аналитических точек $M \in L_{n+1}$, каждая из которых задается однородными координатами x^I, то есть

$$M = x^I A_I. \qquad (4)$$

Точка M останется фиксированной в пространстве P_n при перемещении репера $\{A_I\}$, если аналитическая точка M изменит лишь свою нормировку, то есть преобразуется в точку λM. Следовательно, должно иметь место равенство

$$(\rho + \theta + \Theta)M = (x^I + dx^I)(A_I + dA_I), \qquad (5)$$

где $\rho,\ \theta$ и Θ — множители 0-го, 1-го и 2-го порядков, то есть скаляр, линейная и квадратичная формы. Используя выражения (4), раскроем скобки и вынесем базисные точки:

$$(\rho + \theta + \Theta)x^I A_I = (x^I + x^J\omega_J^I + dx^I + dx^J\omega_J^I)A_I.$$

В силу линейной независимости вершин репера

$$(\rho + \theta + \Theta)x^I = x^I + (x^J\omega^I{}_J + dx^I) + dx^J\omega^I{}_J.$$

Сопоставление членов 0-го порядка определяет множитель ρ: $\rho = 1$. Сравнение членов 1-го порядка малости дает $\theta x^I = x^J\omega_J^I + dx^I$, откуда получаются условия неподвижности точки М

$$dx^I = x^I\theta - x^J\omega_J^I. \qquad (6)$$

Наконец, сопоставим члены 2-го порядка:

$$\Theta x^I = dx^J\omega_J^I = (x^J\theta - x^K\omega_K^J)\omega_J^I = x^K(\delta_K^J\theta - \omega_K^J)\omega_J^I.$$

Преобразуем левую часть:

$$\delta_K^I x^K\Theta = x^K(\delta_K^J\theta - \omega_K^J)\omega_J^I,$$

откуда

$$\delta_K^I\Theta = (\delta_K^J\theta - \omega_K^J)\omega_J^I.$$

Свернем по индексам *I, K*:

$$(n + 1)\Theta = \theta\omega_I^I - \omega_I^J\omega_J^I.$$

Используя условие проективности (3), найдем

$$\Theta = -1/(n + 1)\omega_I^J\omega_J^I. \qquad (7)$$

Утверждение 1. *В равенстве (5) определены множители 0-го и 2-го порядка ρ, Θ, а множитель 1-го порядка θ не определен.*

Форма Пфаффа θ входит в уравнения стационарности (6) точки M с однородными координатами x^I, отражая неопределенность нормировки соответствующей аналитической точки. Неопределенность формы θ можно уменьшить.

Утверждение 2. *Линейная форма θ является полным дифференциалом, то есть*

$$D\theta = 0.$$

Доказательство. Дифференцируем обе части уравнений стационарности (6) с помощью структурных уравнений (2):

$$0 = -dx\wedge\omega_J^I - x^J\omega_J^K\wedge\omega_K^I + dx^I\wedge\theta + x^I D\theta.$$

Подставим выражения дифференциалов координат из уравнений (6):

$$-(x^J\theta - x^K\omega_K^J)\wedge\omega_J^I - x^J\omega_J^K\wedge\omega_K^I + (x^I\theta - x^J\omega_J^I)\wedge\theta + x^I D\theta = 0.$$

После приведения подобных членов останется $x^I D\theta = 0$, откуда следует утверждение.

Выделим нулевое значение индекса $I = (0, i)$, $i,\ldots=\overline{1,n}$. Разложение (4) запишем подробнее:

$$M = x^0 A_0 + x^i A_i. \qquad (8)$$

Предполагая, что точка M не лежит в координатной гиперплоскости $P_{n-1} = [A_i]$, которая в общем случае не инвариантна, имеем $x^0 \neq 0$. Разделим равенство (8) на x^0:

$$1/x^0 M = A_0 + x^i/x^0 A_i.$$

Так вводятся неоднородные координаты $X^i = x^i/x^0$ точки M. Запишем дифференциал этой дроби:

$$dX^i = (x^0 dx^i - x^i dx^0)/(x^0)^2. \quad (9)$$

Уравнения стационарности (6) дают

$$dx^0 = x^0\theta - x^0\omega_0^0 - x^j\omega_j^0,\ dx^i = x^i\theta - x^0\omega_0^i - x^j\omega_j^i.$$

Подставим их в формулу (9) и после преобразований получим

$$dX^i + X^j(\omega_j^i - \delta_j^i\omega_0^0) - X^i X^j\omega_j^0 + \omega_0^i = 0. \quad (10)$$

Получили [2] уравнения неподвижности точки M в неоднородных координатах, когда она представлена аналитической точкой $A_0 + X^i A_i$.

Выводы. Дифференциальные уравнения (6) для однородных координат x^i точки проективного пространства P_n показывают, что они образуют тензор или псевдотензор [3], то есть их обращение в нуль инвариантно. Напротив, из дифференциальных уравнений (10) неоднородных координат X^i видно, что они не образуют ни тензор, ни квазитензор. Объект X^i можно назвать квадратично-квазитензорным объектом. В уравнения (10) входят формы $\omega_j^i - \delta_j^i\omega_0^0$, ω_j^0, ω_0^i, фигурирующие во втором аналитическом аппарате [3].

2. Гиперплоскость

Гиперплоскость $\Pi_{n-1} \in P_n$ относительно подвижного репера $\{A_I\}$ можно определить линейным однородным уравнением

$$b_I x^I = 0, \quad (11)$$

связывающим однородные координаты x^I ее текущей точки M. При инфинитезимальном смещении репера уравнение (11) примет вид

$$(b_I + db_I)(x^I + dx^I) = 0.$$

Используем уравнения стационарности точки (6), хотя нам не требуется, чтобы каждая точка гиперплоскости была инвариантна:

$$(b_I + b_I\theta - b_J\omega_I^J + db_I + db_I\theta - db_J\omega_I^J)x^I = 0.$$

Потребуем, чтобы это уравнение определяло исходную гиперплоскость, то есть

$$b_I + (b_I\theta - b_J\omega_I^J + db_I) + (db_I\theta - db_J\omega_I^J) =$$
$$= (\omega_0 + \omega_1 + \omega_2)b_I,$$

где ω_0 — функция; ω_1 и ω_2 — линейная и обычная квадратичная формы. Как и в случае точки $M \in P_n$ имеем

$$b_I = \omega_0 b_I,\ b_I\theta - b_J\omega_I^J + db_I = \omega_1 b_I,$$
$$db_I\theta - db_J\omega_I^J = \omega_2 b_I. \qquad (12)$$

Из условий ($12_{1,2}$) имеем

$$\omega_0 = 1,\ db_I = b_J\omega_I^J + b_I\omega, \qquad (13)$$

где $\omega = \omega_1 - \theta$. Получили ($13_2$) — систему дифференциальных уравнений неподвижности гиперплоскости Π_{n-1}, двойственную системе (6).

Подставим уравнения (13_2) в условие (12_3) и вынесем b_J:

$$b_J(\omega_I^J\theta + \delta_I^J\omega\theta - \omega_K^J\omega_I^K - \omega\omega_I^J) = \omega_2\delta_I^J b_J,$$

откуда

$$\delta_I^J\omega_2 = \omega_I^J\theta + \delta_I^J\omega\theta - \omega_K^J\omega_I^K - \omega\omega_I^J.$$

Свернем

$$(n+1)\omega_2 = \omega_I^I\theta + (n+1)\omega\theta - \omega_K^I\omega_I^K - \omega\omega_I^I.$$

Используем условие проективности и найдем ω_2:

$$\omega_2 = \omega\theta - 1/(n+1)\omega_J^I\omega_I^J = \omega\theta + \Theta.$$

Утверждение 3. *Неопределенная форма Пфаффа ω в уравнениях стационарности (13_2) гиперплоскости Π_{n-1} с уравнением (11) является полным дифференциалом, то есть $D\omega = 0$.*

Доказательство. С помощью уравнений структуры пространства P_n продифференцируем уравнения (13_2), начиная справа:

$$db_I \wedge \omega + b_I D\omega + db_J \wedge \omega_I^J + b_J \omega_I^K \wedge \omega_K^J = Ddb_I.$$

Подставим уравнения (13):

$$(b_J \omega_I^J + b_I \omega) \wedge \omega + b_I D\omega +$$
$$+ (b_K \omega_J^K + b_J \omega) \wedge \omega_I^J + b_J \omega_I^K \wedge \omega_K^J = 0.$$

Приведем подобные:

$$b_I D\omega + b_K \omega_J^K \wedge \omega_I^J + b_J \omega_I^K \wedge \omega_K^J = 0.$$

Заменим индексы J и K и воспользуемся антикоммутативностью внешнего умножения, тогда $b_I D\omega = 0$, откуда следует утверждение.

Запишем уравнение (11) гиперплоскости Π_{n-1} подробнее:

$$b_0 x^0 + b_i x^i = 0. \quad (14)$$

Пусть гиперплоскость Π_{n-1} не проходит через точку A_0, то есть $b_0 \neq 0$, тогда уравнение (14) представим в виде

$$x^0 + b_i/b_0 x^i = 0.$$

Введем неоднородные координаты гиперплоскости Π_{n-1}: $B_i = b_i/b_0$.

Запишем уравнения неподвижности (13_2) подробнее:

$$db_0 = b_0 \omega_0^0 + b_j \omega_0^j + b_0 \omega, \; db_i = b_0 \omega_i^0 + b_j \omega_i^j + b_i \omega.$$

С их помощью найдем дифференциалы неоднородных координат:

$$dB_i = 1/(b_0)^2 [b_0(b_0 \omega_i^0 + b_j \omega_i^j + b_i \omega) - b_i(b_0 \omega_0^0 + b_j \omega_0^j + b_0 \omega)].$$

Приведем подобные, раскроем скобки и используем неоднородные координаты:

$$dB_i - B_j(\omega_i^j - \delta_i^j \omega_0^0) + B_i B_j \omega_0^j - \omega_i^0 = 0. \quad (15)$$

Получили [2] систему дифференциальных уравнений стационарности гиперплоскости Π_{n-1} в неоднородных координатах, двойственную системе (10).

Утверждение 4. *Совокупность функций B_i, определяющая неподвижную гиперплоскость $x^0 + B_i x^i = 0$, образует квадратично-квазитензорный геометрический объект с дифференциальными уравнениями (15).*

Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

2. *Столяров А.В.* Системы уравнений Пфаффа в инволюции. Классические пространства. Чебоксары, 1998.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

V. Kozyajkin

Complete conditions for stationarity of a point and a hyperplane in projective space

In projective space complete equations for stationarity of a point and a hyperplane are found by means of analytical apparatus with the condition of projectivity. It is shown, that forms characteristic for another analytical apparatus of projective space are appeared upon transition to nonhomogeneous coordinates of a point and nonhomogeneous equation of a hyperplane.

УДК 514.75

А.В. Кулешов

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Об одном проективном инварианте семейства гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров

В многомерном проективном пространстве рассматривается семейство гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров. Ставится задача построения дифференциальных инвариантов данного семейства. Она решается в общем случае, характеризующемся невырожденностью некоторого тензора. Решение основано на методе подвижного репера и исчислении внешних дифференциальных форм Э. Картана.

Ключевые слова: проективное пространство, гиперплоский элемент, дифференциальный инвариант, подвижной репер, метод внешних форм.