Список литературы

1. *Шапуков Б.Н.* Автоморфизмы расслоенных пространств // Тр. геом. сем. КГУ. 1982. Т. 14. С. 97 – 108.

M. Sorokina

ABOUT AUTOMORPHISMS
OF ALMOST SYMPLECTIC STRUCTURE ON TANGENT
BUNDLE OF GENERALIZED LAGRANGE SPACE

We consider automorphisms of almost symplectic structure on tangent bundle of generalized Lagrange space. We determine maximum dimension of algebra Lie of infinitesimal automorphisms preserving fibre on tangent bundle.

УДК 514.756.2

А.В. Столяров
(Чувашский государственный педагогический университет)

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКИХ СЕТЕЙ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Изучается геометрия плоской сети Σ_n, заданной в конформном (псевдоконформном индекса $l \neq 0$ или собственно конформном, $l = 0$) пространстве C_n; более детально исследуется внутренняя геометрия ортогональных чебышевской, геодезической сетей и n-сопряженных систем $\Sigma_n \subset C_n$.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения: $\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}$; $i, j, k, l, s, t = \overline{1, n}$.

1. Рассмотрим конформное пространство C_n (псевдоконформное или собственно конформное [12]); отнесем его к подвижному полуизотропному [4] реперу $R=\{A_\lambda\}$, состоящему из точек A_0, A_{n+1} и *n* гиперсфер A_i действительных ненулевых радиусов, проходящих через эти точки. Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [1], [12]

$$\left\| g_{\lambda\mu} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}; \tag{1}$$

отметим, что матрица $\left\| g_{ij} \right\|$ является невырожденной.

Если $P(x^\lambda)$ – точка пространства C_n, то в силу (1) и $(PP)=0$ ее координаты удовлетворяют уравнению

$$g_{ij}x^i x^j + 2x^0 x^{n+1} = 0.$$

Это уравнение есть уравнение неподвижной действительной овальной гиперквадрики Дарбу Q_n^2 (абсолют) проективного пространства P_{n+1}, на которую отображаются все точки конформного пространства C_n.

При бесконечно малом преобразовании конформной группы (стационарной подгруппы абсолюта $Q_n^2 \subset P_{n+1}$) элементы конформного репера *R* (проективного репера R) получают приращения, главную часть которых определяют дифференциалы dA_λ (соответственно dA_λ), являющиеся гиперсферами (точками); эти дифференциалы разлагаются по элементам исходного репера *R* (R) следующим образом:

$$dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu \ \text{(соответственно } dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu\text{)}, \tag{2}$$

где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ зависят от параметров стационарной подгруппы абсолюта Q_n^2.

Условиями полной интегрируемости системы уравнений (2) являются структурные уравнения, которым подчинены формы ω_λ^μ: $D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu$. Кроме того, в силу соотношений (1), (2) формы ω_λ^μ удовлетворяют следующим линейным зависимостям [1]:

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0;$$

$$\omega_i^0 + g_{ik}\omega_{n+1}^k = 0, \; \omega_i^{n+1} + g_{ik}\omega_0^k = 0; \; dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0.$$

2. На абсолюте Q_n^2 проективного пространства P_{n+1} рассмотрим сеть $\tilde{\Sigma}_n$, описываемую точкой A_0; в проективном репере R, отнесенном к ее линиям (т.е. вершины A_i репера R выбраны на касательных к линиям сети $\tilde{\Sigma}_n$), дифференциальные уравнения сети $\tilde{\Sigma}_n \subset Q_n^2$ имеют вид [3]:

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega_0^k, \; i \neq j.$$

Каждому из *n* семейств линий сети $\tilde{\Sigma}_n$ (*n* линейно независимых семейств однопараметрических множеств точек A_0, лежащих на абсолюте Q_n^2) в конформном пространстве C_n соответствует семейство линий; *n* таких линейно независимых семейств линий в пространстве C_n образуют сеть $\Sigma_n \subset C_n$, которую по аналогии с [2] назовем *плоской*.

Функции $a_i^s \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{j \neq i} g_{ij} g^{js} - (n-1)\delta_i^s$ являются относительными ($i \neq s$) или абсолютными (i=s) инвариантами: $\delta a_i^s = a_i^s(\pi_i^i - \pi_s^s)$. Матрица порядка *n* из относительных и абсолютных инвариантов a_i^s, вообще говоря, не вырождена; в этом легко убедиться, например, в случае ортогональной сети $\Sigma_n \subset C_n$ ($g_{ij} = 0, i \neq j$, см. п. 3). Элементы $\overset{*}{a}{}_k^i$ обратной матрицы определяются соотношениями

$$\overset{*}{a}{}_l^i a_s^l = \overset{*}{a}{}_s^l a_l^i = \delta_s^i.$$

Охват $q_i^0 \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{j \neq k} a_{kj}^j\right) \overset{*}{a}{}_i^k$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $dq_i^0 + q_i^0(\omega_0^0 - \omega_i^i) + \omega_i^0 = q_{is}^0 \omega_0^s$. Гиперсферы $F_i = q_i^0 A_0 + A_i$, принадлежащие «касательным» к линиям сети $\Sigma_n \subset C_n$, являются инвариантными; назовем их гармоническими гиперсферами сети. Очевидно, что поле гармонических точек $F \overset{\text{def}}{=} [F_i]$ пересечения *n* гармонических гиперсфер F_i сети, согласно [7; 8], задает нормализацию конформного пространства C_n. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Поле гармонических точек F плоской сети $\Sigma_n \subset C_n$ внутренним образом определяет нормализацию конформного пространства C_n.*

3. Предположим, что задана нормализация конформного пространства C_n полем квазитензора x_i^0:

$$dx_i^0 + x_i^0 \omega_0^0 - x_k^0 \omega_i^k + \omega_i^0 = x_{ik}^0 \omega_0^k.$$

Известно [11], что система форм $\{\theta_i^k\}$:

$$\begin{cases} \theta_0^k = \omega_0^k, \\ \theta_i^k = \omega_i^k - \delta_i^k(\omega_0^0 - x_s^0 \omega_0^s) + g^{ks} x_s^0 \omega_i^{n+1} + x_i^0 \omega_0^k \end{cases} \tag{3}$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана – Лаптева [5; 6], а следовательно, определяет пространство аффинной связности $A_{n,n}$ без кручения. Согласно [11] пространство $A_{n,n}$ является вейлевым с полем метрического тензора g_{ik}; это пространство становится римановым тогда и только тогда, когда кососимметричный тензор $x_{[ik]}^0$ обращается в нуль.

Допустим, что сеть $\Sigma_n \subset C_n$ – ортогональная, т. е. касательные к ее линиям попарно ортогональны:

$$(A_i A_j) = g_{ij} = 0, \; i \neq j.$$

Условием параллельного перенесения направления A_0M, где $M = \mu^k(x_k^0 A_0 + A_k)$, вдоль кривой *l* в аффинной связности ∇, определяемой системой форм (3), является выполнение уравнений $d\mu^i + \mu^k \theta_k^i = \Theta\mu^i (\mathrm{mod}\ l)$. Если в качестве линии *l* взять линию ω_0^k ортогональной сети, то последнее условие равносильно соотношениям

$$a_{ik}^j - g^{jj} x_j^0 g_{ik} + x_i^0 \delta_k^j = 0, i \neq j.$$

Таким образом, *условием параллельного перенесения направления* A_0A_i *касательной к i-й линии ортогональной сети* $\Sigma_n \subset C_n$ *вдоль ее k-й линии в аффинной связности* ∇, *индуцируемой нормализацией конформного пространства полем квазитензора* x_s^0, *является выполнение соотношений (4).*

4. Если условие (4) справедливо для любых $i \neq k \ \ (i = k)$, то ортогональная сеть $\Sigma_n \subset C_n$ называется *чебышевской* (*геодезической*) относительно данной нормализации конформного пространства C_n, определяемой полем квазитензора x_i^0. Справедливы следующие результаты:

Теорема 2. *Если относительно некоторой нормализации конформного пространства C_n полем квазитензора* x_i^0 *пространство C_n несет ортогональную геодезическую сеть* Σ_n *в аффинной связности* ∇ *, то она является сетью с совпавшими псевдофокальными гиперсферами и данная нормализация является нормализацией полем ее гармонических точек F* $(x_i^0 \equiv q_i^0)$.

Теорема 3. *Если ортогональная сеть* $\Sigma_n \subset C_n$ *есть сеть с совпавшими псевдофокальными гиперсферами, то при нормализации конформного пространства C_n полем ее гармонических точек F данная сеть является геодезической относительно аффинной связности* ∇.

Теорема 4. *Если ортогональная сеть $\Sigma_n \subset C_n$ относительно некоторой нормализации конформного пространства C_n является чебышевской в аффинной связности ∇, то она является геодезической; при этом данная нормализация есть нормализация пространства C_n полем гармонических точек F сети.*

Заметим, что *при n=2 всякая ортогональная сеть $\Sigma_2 \subset C_2$ при нормализации конформной плоскости C_2 полем ее гармонических точек относительно аффинной связности ∇ является геодезической и чебышевской одновременно.*

Теорема 5. *Ортогональные чебышевские сети $\Sigma_n \subset C_n$ ($n > 2$) существуют с произволом n^2 произвольных постоянных; ортогональные сети $\Sigma_2 \subset C_2$ существуют с произволом две функции одного аргумента.*

Теорема 6. *Внутренняя геометрия пространства аффинной связности $A_{n,n}$, индуцируемого нормализацией конформного пространства C_n полем гармонических точек F ортогональной чебышевской сети $\Sigma_n \subset C_n$ ($n > 2$), является евклидовой (локально).*

Теорема 7. *Внутренняя геометрия пространства аффинной связности $A_{2,2}$, индуцируемого нормализацией конформной плоскости C_2 полем гармонических точек F ортогональной сети $\Sigma_2 \subset C_2$, есть риманова тогда и только тогда, когда она является евклидовой (локально).*

5. По аналогии с работами [9; 10] будем говорить, что ортогональная сеть $\Sigma_n \subset C_n$ есть *n*-сопряженная система, если при перенесении Дарбу соответствующая ей сеть $\tilde{\Sigma}_n \subset Q_n^2 \subset P_{n+1}$ является *n*-сопряженной системой, т.е. все псевдофокусы

$$F_i^j = -a_{ij}^j A_0 + A_i, \ i \neq j$$

каждой касательной A_0A_i к линии ω_0^i ортогональной сети $\tilde{\Sigma}_n$ являются фокусами. Справедливы следующие результаты:

Теорема 8. *Плоская ортогональная сеть* $\Sigma_n \subset C_n$ $(n \geq 2)$ *есть* n*-сопряженная система тогда и только тогда, когда она является голономной.*

Теорема 9. *Ортогональная сеть* $\Sigma_n \subset C_n$ $(n > 2)$ *есть чебышевская тогда и только тогда, когда она является* n*-сопряженной геодезической сетью.*

Заметим, что при $n=2$ всякая ортогональная сеть $\Sigma_2 \subset C_2$ является чебышевской, геодезической и 2-сопряженной системой одновременно.

Теорема 10. n*-сопряженные системы* $\Sigma_n \subset C_n$ $(n \geq 2)$ *существуют с произволом* n(n – 1) *функций одного аргумента.*

Список литературы

1. *Акивис М.А.* К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей // Матем. сб. 1961. Т. 53. №1. С. 53 – 72.

2. *Базылев В.Т.* К геометрии плоских многомерных сетей // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В.И. Ленина. 1965. №243. С. 29 – 37.

3. *Базылев В.Т.* О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Изв. вузов. Математика. 1966. №2. С. 9 – 19.

4. *Бушманова Г.В., Норден А.П.* Элементы конформной геометрии. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972.

5. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии / ВИНИТИ, 1979. Т. 9.

6. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. общества. 1953. Т. 2. С. 275 – 382.

7. *Норден А.П.* Конформная интерпретация пространства Вейля // Матем. сб. 1949. Т. 24. №1. С. 75 – 85.

8. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

9. *Смирнов Р.В.* Преобразования Лапласа *p*-сопряженных систем // ДАН АН СССР. 1950. Т. 71. №3. С. 437 – 439.

10. *Столяров А.В.* О внутренней геометрии двух классов плоских многомерных сетей в проективном пространстве // Изв. вузов. Математика. 1969. №8. С. 104 – 111.

11. *Столяров А.В.* Внутренняя геометрия нормализованного конформного пространства // Изв. вузов. Математика. 2002. №11. С. 61 – 70.
12. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalizations. USA, 1996.

A. Stolyarov

THE INTERIOR GEOMETRY OF FLAT NETS IN A CONFORMAL SPACE

In the work the geometry of a flat nets given in a conformal space is investigated; also the interior geometry of the orthogonal Chebyishev′s and geodesic nets and *n*-conjugated systems is studied in detail.

УДК 514.75

О.М. Хрусталева
(Калининградский государственный университет)

О ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНЕСЕНИЯХ В СВЯЗНОСТЯХ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ОСНАЩЕНИЕМ БОРТОЛОТТИ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрено оснащение Бортолотти семейства плоскостей в проективном пространстве. Приведены три типа групповой связности, индуцированной этим оснащением. Описаны параллельные перенесения в связностях трех типов, которые оказались свободно и связанно вырожденными.

В проективном пространстве P_n исследуется r-мерное семейство B_r ($1 \le r < (m+1)(n-m)$) m-мерных плоскостей L_m ($1 \le m < n$) [1]. Произведена специализация подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, при которой вершины A, A_a помещены на плоскость L_m, причем индексы принимают значения: $a, b, c = \overline{1, m}$;