2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовых пространствах. Лит. матем. сб. 1966, VI, № 4, 475-492.

3. С х о у т е н И.А., Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии М., ГИИЛ, 1948, т.2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I0 1979

УДК 513.73

Е.П. С о п и н а

О КОНГРУЭНЦИЯХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе построен канонический репер конгруэнции $\mathcal{K}$ эллипсоидов и дана геометрическая характеристика его относительных инвариантов. Определены квадрики, ассоциированные с квадрикой конгруэнции $\mathcal{K}$ и исследован специальный класс конгруэнций $\mathcal{K}$ с распадающимися на плоскости ассоциированными квадриками.

Рассмотрим в трехмерном аффинном пространстве A_3 конгруэнцию $\mathcal{K}$ эллипсоидов Q, центры которых описывают поверхность, не являющуюся торсом. Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A -центр эллипсоида Q, векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ направлены по асимптотическим касательным к поверхности (A), а вектор $\bar{e}_3$ направлен по сопряженному направлению к касательной плоскости к поверхности (A). Концы векторов $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ расположены на эллипсоиде Q. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha\ ,\quad d\bar{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{e}_\beta\ ,$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha\ ,\ \ \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta .$$

Уравнение эллипсоида Q и система дифференциальных уравнений конгруэнции $\mathcal{K}$ запишутся соответственно в виде:

$$F\equiv(x^1)^2+(x^2)^2+2\lambda x^1x^2-1=0\ , \qquad (1)$$

$$
\begin{aligned}
&\omega^3 = 0, \quad \omega^3_i = m\,\omega^j, \quad \omega^3_3 = c_k\,\omega^k, \\
&\omega^i_i - \omega^3_3 + \lambda\,\omega^j_i = a^j_k\,\omega^k, \\
&\omega^3_i + \omega^i_3 + \lambda\,\omega^j_3 = b^i_k\,\omega^k, \\
&\omega^2_1 + \omega^1_2 + \lambda\,(\omega^1_1 + \omega^2_2 - 2\omega^3_3) - d\lambda = \tau_k\,\omega^k, \\
&\omega^j_i = s^i_k\,\omega^k, \\
&dm = -m\,(\omega^3_3 - \omega^2_2 - \omega^1_1 + 2\,(s^1_2\,\omega^1 + s^2_1\,\omega^2)).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Здесь и в дальнейшем $i, j, k = 1, 2$, $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Анализируя систему (2), убеждаемся, что конгруэнции $\mathcal{K}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е 1. Инвариантные квадрики Q_i, определяемые уравнениями

$$
\mathcal{F}_i = a^j_i (x^i)^2 + a^i_i (x^j)^2 + \tau_i x^i x^j + b^i_i x^i x^3 + b^j_i x^j x^3 + \lambda x^j + x^i + c_i = 0, \tag{3}
$$

называются ассоциированными квадриками. Из (2) и (3) непосредственно следует, что прямая $\ell \equiv (Ae_3)$ тогда и только тогда является прямолинейной образующей ассоциированной квадрики Q_i $(\mathcal{F}_i = 0)$, когда Q_i проходит через центр квадрики Q. Ассоциированные квадрики позволяют дать характеристику относительных инвариантов конгруэнции эллипсоидов. Условие $c_i = 0$ означает, что квадрика Q_i проходит через центр A квадрики Q; условие $\lambda = 0$ означает, что направления $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно квадрики Q. Условия $b^i_i = 0$, $b^j_i = 0$, $\tau_i = 0$ означают соответственно, что векторы $\bar{e}_i$ и $\bar{e}_3$, $\bar{e}_j$ и $\bar{e}_3$, $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно Q_i. Из того, что $a^i_j = 0$, $a^j_i = 0$, следует, что (Ae_i), (Ae_j) – асимптотические направления квадрики Q_i. Условие $m = 0$ означает, что поверхность (A) вырождается в плоскость. Из (2) получаем, что вектор аффинной нормали [2] поверхности (A) в точке A

имеет вид $\bar{\ell} = m\bar{e}_3 + s^2_1\bar{e}_1 + s^1_2\bar{e}_2$. Следовательно, условие $s^i_j = 0$ означает, что аффинная нормаль поверхности (A) лежит в плоскости $x^j = 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{K}_1$ называется конгруэнция $\mathcal{K}$, обладающая следующими свойствами: каждая из квадрик Q_i распадается на пару плоскостей, параллельных плоскости $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_3)$.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $\mathcal{K}_1$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{K}_1$ приводится к виду

$$
\begin{aligned}
&\omega^3 = 0, \quad \omega^3_i = m\,\omega^j, \quad \omega^3_3 = c_k\,\omega^k, \\
&\omega^i_i - \omega^3_3 = 0, \quad \omega^2_1 + \omega^1_2 = 0, \quad \omega^i_3 + \omega^3_i = 0, \\
&\omega^2_1 = s^2_k\,\omega^k, \quad dm = m\,\omega^1_1 + 2m\,(s^2_2\,\omega^1 - s^2_1\,\omega^2).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Замыкая систему (4), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{K}_1$ обладают следующими свойствами: 1/ в расширенном аффинном пространстве ассоциированная квадрика Q_i распадается на несобственную плоскость и плоскость, параллельную $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_3)$; 2/ поверхности (M_ε), где

$$
M_\varepsilon = A - c_1\bar{e}_1 - c_2\bar{e}_2 + \varepsilon\sqrt{1 - c_1^2 - c_2^2}, \quad (\varepsilon^2 = 1), \tag{5}
$$

являются единственными собственными фокальными поверхностями [1]; 3/ центр квадрики $Q \in \mathcal{K}_1$ совпадает с центром луча ℓ прямолинейной конгруэнции (ℓ); 4/ прямолинейная конгруэнция (ℓ) сопряжена поверхности (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ В силу (4) уравнения ассоциированных квадрик в однородных координатах принимают вид $\mathcal{F}_i \equiv x^0 (x^j + c_i x^0) = 0$;

2/ Система уравнений $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{F}_1 \equiv x^2 + c_1 = 0$, $\mathcal{F}_2 \equiv x^1 + c_2 = 0$ определяет только две собственные фокальные точки M_ε.

3/ Фокусы луча ℓ прямолинейной конгруэнции (ℓ) определяются формулой

$$
B_\varepsilon = A + \frac{\varepsilon}{m}\bar{e}_3. \tag{6}
$$

Следовательно, A центр луча ℓ.

4/Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ) имеет вид

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0 .$$

Значит они высекают на поверхности (A) сопряженную сеть линий.

Список литературы

1.Малаховский В.С.,Махоркин В.В.Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ,1974, 6,с.113-133.

2.Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., ГИТТЛ,1948

УДК 513.73

Т.П.Фунтикова

ОДНОМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ЭЛЛИПСОВ В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются одномерные многообразия (C)эллипсов с непараллельными плоскостями.Найдены условия,при которых многообразия (C) являются фокальными.Установлен характеристический признак фокальных многообразий (C),а также указаны условия,при которых все эллипсы многообразия (C) инцидентны инвариантной квадрике.

§ 1. Система дифференциальных уравнений многообразия (C)

Отнесем одномерное многообразие (C) эллипсов к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$,имеющему следующую геометрическую характеристику: вершина A репера помещена в центр эллипса C; вектор $\bar{e}_1$ параллелен характеристике плоскости эллипса C; вектор $\bar{e}_2$ сопряжен по направлению вектору $\bar{e}_1$, причем концы векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ принадлежат эллипсу; вектор $\bar{e}_3$ направлен таким образом, что касательная к индикатрисе вектора $\bar{e}_2$ параллельна плоскости векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_3$.

В построенном репере уравнения эллипса C имеет следующий вид:

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{1}$$

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha , \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta - \tag{2}$$

-деривационные формулы репера R, причем формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры аффинного простран-