the classification of such mappings is given. The geometry of two of chosen of seven classes is described. In particular, the necessary and sufficient conditions of existence of equiaffine diffeomorphisms and the view of the metrics of Riemannian manifolds, supposing such mappings, are found.

УДК 514.75

В.С. Кальницкий
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ПЛОСКИХ И ОДНОРОДНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Использованы полиномиальные симметрии плоских и однородных связностей. Доказана классификационная теорема. Рассмотрены вопросы реализуемости полной и неполной связностей.

§1. Введение

Пусть M^n однородное многообразие симметричной линейной связности ∇, Γ – транзитивная псевдогруппа всех локальных аффинных отображений. Элементы псевдогруппы, связывающие точки p, q, будем обозначать φ_{pq}. Все дальнейшие построения опираются на работу Номидзу [1], в которой доказана следующая

Теорема. *Пусть на односвязном многообразии задано тензорное уравнение, пространство ростков решений которого в каждой точке конечномерно и размерность есть постоянная функция точки на многообразии. Любой росток локального решения продолжим на все многообразие.*

Применим этот результат к пространству решений серии обобщенных уравнений Якоби – тензорных уравнений на пространстве тензорных полей A типа (1, k) вида:

$$\sigma\{\nabla\nabla A+R(A)\}=0,$$

где σ означает симметризацию по ковариантным символам. Автором в [2] доказано, что каждое из обобщенных уравнений Якоби имеет конечномерное пространство ростков решений в каждой точке. В силу однородности связности и инвариантности уравнений Якоби относительно локальных аффинных отображений пространства ростков в разных точках изоморфны. Изоморфизм доставляется локальными автоморфизмами Г. Чтобы воспользоваться указанным результатом Номидзу, необходимо рассмотреть универсальное накрывающее пространство исходного многообразия (M', π, M). С помощью проекции π на накрывающей индуцируется симметричная линейная связность, которая будет однородной с той же транзитивной псевдогруппой. Теперь мы находимся в условиях теоремы. Все ростки решений уравнений Якоби могут быть продолжены на все накрывающее пространство, т.е. алгебра Якоби $\Im(M',\nabla')$ состоит из глобально определенных тензорных полей. Однако эта алгебра шире алгебры полей Якоби на базе. Не все поля из первого пространства являются лифтами тензорных полей с базы. Чтобы описать такие поля, введем понятие оператора сдвига. Рассмотрим пространство ростков в произвольной точке $p\in M'$. Все ростки однозначно продолжаются вдоль накрывающей, и потому каждый росток однозначно определяет некоторый росток в произвольной точке q. Во-первых, такое соответствие задает изоморфизм пространства ростков. Во-вторых, эта операция сохраняет скобку Ли в силу глобальной определенности полей и того, что скобка Ли решений уравнения Якоби тоже является решением. Иными словами, такая операция определяет изоморфизм T_{pq} градуированных алгебр Якоби $\Im(U_p)$ и $\Im(U_q)$ некоторых окрестностей точек p, q. С другой стороны, произвольный элемент $\varphi_{qp}\in\Gamma$ определяет изоморфизм $\varphi_{qp}{}^*$ этих алгебр и можно рассматривать автоморфизм пространства $\Im(U_p) \cong \Im(M')$:

$$\varphi_{qp}{}^* \circ T_{pq}: \Im(U_p) \to \Im(U_p).$$

Если рассмотреть произвольную петлю Г с началом в точке $x \in M$ на многообразии M, то можно исследовать продолжение ростков решений вдоль накрывающего пути с началом в точке p и концом в точке q, где p, q $\in \pi^{-1}(x)$. Спуск посредством проекции оператора T_{pq} на окрестность точки x определяет автоморфизм $\varphi([\gamma])$: $\Im(U_x) \to \Im(U_x)$, зависящий только от гомотопического класса петли. Этот оператор является автоморфизмом градуированной алгебры. В работе автора [2] было замечено, что в случае одномерного многообразия алгебра $\Im(U_x) \cong \Im(IR^1)$ и все такие автоморфизмы имеют вид φ^*, где φ – произвольное аффинное преобразование IR^1. Возникло предположение, что аналогичный результат верен для плоских многообразий. Эта гипотеза была доказана автором в [3] в следующей формулировке. Любой автоморфизм градуированной алгебры $\Im(IR^n)$, отвечающей плоской канонической связности, коммутирующий с симметризованной ковариантной производной на множестве, где она определена, порождается некоторым аффинным преобразованием IR^n. Поле X определено на M вдоль петли Г, только если $X \in \mathrm{Inv}\ \varphi([\gamma])$. Из сформулированных теорем вытекает стратегия классификации плоских алгебр Якоби многообразий. Задано представление фундаментальной группы в группе аффинных преобразований и описано максимальное тривиальное подпредставление. Во-первых, простейшие примеры показали, что не все алгебры из полученного списка реализуются. Во-вторых, явное описание алгебры $\Im(IR^n)$ – непростая комбинаторная задача. Важным обстоятельством в доказательстве последней теоремы явилось совершенство алгебры Ли аффинной группы. Для неплоского случая, когда алгебра инфинитезимальных аффинных преобразований куда беднее, трудно было ожидать так просто формулирующегося утверждения. В поисках обобщений этой теоремы было введено понятие *пульверизационной алгебры* и обнаружены интересные связи и новые тензорные структуры, изложение которых содержится в [4].

§2. Классификационная теорема

Вернемся к произвольной однородной связности. Если π – накрытие, p, q $\in \pi^{-1}(x)$, локальный диффеоморфизм $\mu=\pi_p^{-1} \circ \pi_q$ окрестностей является автоморфизмом связности и потому определен оператор $T_{pq}{}^{\mu}$. Более того, фундаментальная группа свободно действует на накрывающем пространстве и, в силу сказанного выше, она действует глобально определенными аффинными отображениями. Возникает точное представление монодромии в аффинной группе Aff(M'), задающее свободное действие на накрывающем пространстве:

$$R: \pi_1(M) \to Aff(M').$$

Для такого представления строится множество операторов

$$\{\rho([\gamma])=R^{-1}([\gamma]) \circ T_{pR([\gamma])p} \in Aut\, \Im(M') \mid [\gamma]\in\pi_1(M)\}.$$

Докажем, что такое сопоставление есть гомоморфизм:

$$\rho([\beta] \circ [\alpha]) = \rho([\beta]) \circ \rho([\alpha]).$$

Действительно, если петля накрывается двумя путями $p^\frown r$ и $q^\frown m$ на M', то вдоль этих путей ростки продолжаются одинаково, т.е. операторы сдвига просто сопряжены с помощью локальной замены координат, определяемой самим накрытием

$$T_{pr}= (\pi_r^{-1} \circ \pi_m)^* \circ T_{qm} \circ (\pi_q^{-1} \circ \pi_p)^*.$$

Запишем по определению:

$$\rho([\alpha]) = (\pi_p^{-1} \circ \pi_q)^* \circ T_{pq},\ \rho([\beta]) = (\pi_p^{-1} \circ \pi_r)^* \circ T_{pr},$$

$$\rho([\beta]) \circ \rho([\alpha]) = (\pi_p^{-1} \circ \pi_r)^* \circ T_{pr} \circ (\pi_p^{-1} \circ \pi_q)^* \circ T_{pq} =$$

$$=(\pi_p^{-1} \circ \pi_r)^* \circ ((\pi_r^{-1} \circ \pi_m)^* \circ T_{qm} \circ (\pi_q^{-1} \circ \pi_p)^*) \circ (\pi_p^{-1} \circ \pi_q)^* \circ T_{pq} =$$

$$=(\pi_p^{-1} \circ \pi_m)^* \circ T_{qm} \circ T_{pq} = (\pi_p^{-1} \circ \pi_m)^* \circ T_{pm} = \rho([\beta] \circ [\alpha]).$$

Сформулируем окончательный результат.

Теорема (классификационная). *Для описания всех возможных алгебр Якоби однородной связности на многообразиях с накрывающим пространством* M' *необходимо описать все* *возможные подгруппы группы аффинных диффеоморфизмов* Aff(M’)*, свободно действующих на нем. Каждая такая подгруппа* π *определяет множество автоморфизмов* $\rho(a)$, $a\in\pi$, *алгебры Якоби пространства* M’:

$$\rho(a)=(a^{-1})^{*}T_{pa(p)}$$

и однородное многообразие M *с фундаментальной группой* π *и алгеброй Якоби*

$$\Im(M)=\bigcap_{a\in\pi}\mathrm{Inv}\,\rho(a).$$

Сформулированная теорема дает исчерпывающую классификацию алгебр Якоби. Явное описание упирается в продолжение решений системы уравнений в частных производных, что представляет собой необозримую задачу. Какие-либо упрощения, как правило, приводят к неполноте списка либо к его избыточности, т.е. требует дополнительного исследования вопрос реализуемости. Среди описанных алгебр много совпадающих. Необходимо в первую очередь изучить произвол, с которым строятся отображения в теореме. Произвол двоякий – выбор накрывающего пространства и выбор точки p. Все накрывающие диффеоморфны, диффеоморфизм является аффинным отображением. Следовательно, отображения R, R’, соответствующие разным накрытиям, сопряжены этим аффинным отображением. Что касается выбора точки p’, отличной от точки p, то в данном случае операторы ρ и ρ' сопряжены оператором сдвига $T_{pp'}$. Действительно, поскольку оператор R является аффинным, для любого $a \in \pi_1$ операторы $T_{pp'}$ и $T_{qq'}$, q=R(a)p, q’=R(a)p’, сопряжены оператором R(a). По определению запишем

$$\rho'(a) = R^{-1}(a)^{*}\circ T_{p'q'} =$$
$$= (T_{pp'}\circ T_{p'p})\circ(R^{-1}(a)^{*}\circ T_{p'q'})\circ(T_{pp'}\circ T_{p'p}) =$$
$$= T_{pp'}\circ(T_{p'p}\circ R^{-1}(a)^{*})\circ(T_{p'q'}\circ T_{p'p})\circ T_{pp'} =$$
$$= T_{pp'}\circ(R^{-1}(a)^{*}\circ T_{q'q})\circ T_{pq'}\circ T_{p'p} =$$
$$= T_{pp'}\circ(R^{-1}(a)^{*}\circ T_{pp'})\circ T_{p'p} = T_{pp'}\circ\rho(a)\circ T_{p'p}.$$

Итак, для любой пары (a, q), $a \in$Aff(M’), q $\in$M’; сопряжение представления ρ оператором сдвига $(aR^{-1}a^{-1})^{*}\circ T_{pq}$ соответствует некоторой замене координат на исходном многообразии. Следовательно, алгебра одна и та же. Можно сказать, что задано действие множества Aff(M')×M' на множестве $\mathrm{Rep}[\pi \to \mathrm{Aut}\ \Im]$ представлений монодромии. Реализуемой алгебре соответствует некоторый класс сопряженности по этому действию. Окончательно *классификация алгебр Якоби сводится к перечислению реализуемых классов*

$$\mathrm{Rep}[\pi \to \mathrm{Aut}\ \Im(M')]/\ \mathrm{Aff}(M')\times M'.$$

Тем самым задача *явной* классификации требует: а) знания группы Aff(M'); б) перечисления свободно действующих подгрупп; в) знания операторов сдвига; г) ответа на вопрос о реализуемости класса.

§3. Вопросы реализуемости

Как ясно из классификационной теоремы, явное описание алгебры Якоби упирается в явное описание оператора $\varphi_{qp}^* \circ T_{pq}$. Для плоского случая такое описание возможно в полной мере, что даст усиление выводов классификационной теоремы, сформулированной ранее для плоского случая. Однако сама эта теорема не перекрывается.

Полная связность. Если многообразие M' – плоское связное, односвязное, то оно диффеоморфно IR^n. Если при этом связность полна, то по теореме Фубини M' диффеоморфно обычному евклидовому пространству. В последнем случае действие $\rho(a)$, $a \in \mathrm{Aff}(n)$, совпадает с действием аффинного отображения a. Поскольку действие a должно быть свободным, у такого аффинного преобразования нет неподвижных точек. Описание алгебр Якоби плоских полных многообразий сводится к перечислению подгрупп π, свободно действующих на IR^n, с точностью до сопряжения группой Aff(n). Тем самым мы можем сформулировать усиленную теорему классификации для плоских многообразий.

Теорема. *Классификация алгебр Якоби плоских полных многообразий сводится к перечислению классов сопряженно-*

сти относительно группы Aff(n) *свободно действующих на* IR^n *подгрупп группы* Aff(n).

Неполная связность. В случае неполной однородной связности $\Im(M') \cong \Im(\mathrm{IR}^n)$. Операторы сдвига T_{pq} совпадают с операторами сдвига на евклидовой плоскости, если точки p, q принадлежат одной нормальной карте (в которой символы Кристоффеля тождественно нулевые). Если точки далеки друг от друга, то произвольный, достаточно хороший путь, их соединяющий, можно разбить на конечное множество отрезков, концы которых принадлежат одной нормальной карте. Тогда оператор сдвига будет представлять собой композицию (попеременно) евклидовых операторов сдвига и операторов, порожденных склеивающими коциклами нормальных карт. Последние, в свою очередь, являются аффинными отображениями нормальных карт. Итак, множество операторов сдвига есть подмножество группы операторов, порожденных аффинными отображениями евклидовой плоскости. Какое именно это множество – зависит от склеивающих коциклов, что в общем случае установить не представляется возможным. Таким образом, описание возможных алгебр на плоском (неполном) многообразии состоит в описании представлений группы π в Aff(n). При этом вопрос реализуемости и точности классификации остается открытым. Все вышесказанное о неполном случае есть в точности вывод классификационной теоремы, сформулированной ранее в [3].

В случае π=ZZ для двумерного пространства рассмотрим множество F неподвижных точек $\rho(1)$. Это либо точка, либо прямая на плоскости. Отображение $\rho(1)$ действует свободно на универсальной накрывающей пространства $\mathrm{IR}^2\backslash F$. Возникающие однородные пространства – торы, бутылки Клейна и цилиндры – имеют алгебры Якоби, соответствующие оператору $\rho(1)$. Аналогичное рассуждение возможно для любой размерности и любой свободной абелевой группы.

Список литературы

1. *Nomizu K.* On local and global existence of Killing vector fields // Ann. Math. 1960. V. 72.

2. *Кальницкий В.С.* Алгебра обобщенных полей Якоби // Зап. науч. сем. ПОМИ. 1995. Т. 231.

3. *Кальницкий В.С.* Алгебры Якоби плоских многообразий // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2003.

4. *Kalnitsky V.S.* Spray Algebra // Proc. of Inst. Math. NAS Ukraine. 2004 (in print).

Работа поддержана грантом мэрии Санкт-Петербурга и Министерства образования РФ №PD03-1.1-27.

V. Kalnitsky

POLYNOMIAL SYMMETRIES
OF FLAT AND HOMOGENEOUS CONNECTIONS

The classification theorem is formulated for symmetries of homogeneous connections on smooth manifold. The cases admitting realization on manifolds are described.

УДК 514.75

М.В. Кретов
(Калининградский государственный университет)

О ПОДКЛАССАХ КОМПЛЕКСОВ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ В ПОВЕРХНОСТЬ МНОГООБРАЗИЕМ ЦЕНТРОВ

Продолжается изучение комплексов (трехпараметрических семейств) K_{32} центральных квадрик в трехмерном аффинном пространстве [1] путем рассмотрения подклассов многообразий квадрик со специальными свойствами ассоциированных образов. Геометрически охарактеризованы характеристические и фокальные многообразия [2] квадрик, являющихся образующими