ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Г.Л.Свешникова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИИ КОНИК В P_3

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции $\mathscr{Y}$ кривых второго порядка C (коник), когда характеристическая точка A_3 плоскости коники инцидентна конике. При этом предполагается, что конгруэнция $\mathscr{Y}$ имеет, по крайней мере, две невырождающиеся фокальные поверхности.

Отнесем конгруэнцию $\mathscr{Y}$ к реперу $R=\{A_\alpha\}$, $\alpha,\beta...=1,2,3,4$. Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера имеют вид $dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta$, где линейные дифференциальные формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$ и условию $\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0$.

Вершины A_1, A_2 репера R совмещаются с фокальными точками коники C, описывающими невырождающиеся поверхности. Пусть p есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i), $i,j,k...=1,2$, R_i – точка пересечения прямой p с касательной к линии $\omega_j^4=0$ на поверхности (A_i), Q – точка пересечения прямой p с плоскостью коники. Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Вершина A_4 репера R помещается в четвертую гармоническую к точке Q относительно точек R_1 и R_2.

Уравнения коники C относительно данного репера при соответствующей нормировке вершин репера записываются в виде

$$x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3=0,\quad x^4=0. \tag{1}$$

Конгруэнция $\mathscr{Y}$ определяется системой уравнений Пфаффа

$$\begin{gathered}\omega_i^j+\omega_i^3=0,\quad \omega_1^3=\Gamma_1^{3k}\omega_k,\quad \omega_2^3=\Gamma_2^{31}\omega_1-\Gamma_1^{31}\omega_2,\\ \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^4=0,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\quad \omega_i^i-\omega_3^3=b_i^k\omega_k,\end{gathered} \tag{2}$$

конечными соотношениями

$$\Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21},$$

$$(\Gamma_3^{ii}-b_i^i)\Gamma_1^{31}+(-1)^i(b_i^j\Gamma_j^{3i}+\Gamma_i^{3j}\Gamma_j^{3i}-\Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{3i}+\Gamma_4^{3i}+\Gamma_4^{ii}+(\Gamma_1^{31})^2)=0 \tag{3}$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (2), (3), причем $\omega_i^4=\omega_i$, $\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$. Анализируя систему, убеждаемся, что конгруэнция $\mathscr{Y}$ существует с произволом пяти функций двух аргументов. Обозначим буквой K_i точку пересечения касательной к конике в точке A_i с прямой A_jA_3, K_i^* – четвертую гармоническую к точке K_i относительно A_j и A_3.

Определение. Конгруэнцией $\mathscr{Y}_0$ называется конгруэнция $\mathscr{Y}$, для которой выполняются следующие условия: 1/ касательная к линии $\omega_j=0$ на поверхности (A_i) инцидентна точке A_4; 2/ касательные плоскости к поверхностям (K_i) и (K_i^*) содержат прямую A_iA_4.

Теорема. Конгруэнция $\mathscr{Y}_0$ существует и определяется вполне интегрируемой системой уравнений.

Доказательство. В силу условий, определяющих конгруэнцию $\mathscr{Y}_0$, системы уравнений Пфаффа (2) и соотношений (3) получаем следующие равенства.

$$\begin{gathered}\Gamma_4^{ii}=\Gamma_4^{ij}=\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31},\quad \Gamma_4^{3i}=-\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31},\quad \Gamma_1^{31}=0,\\ \Gamma_3^{12}-\Gamma_3^{21}=0,\quad \Gamma_1^{32}=\Gamma_2^{31}=a.\end{gathered} \tag{4}$$

Так как поверхности (A_1) и (A_2) не вырождаются в линии, то $a\neq 0$. Система пфаффовых уравнений (2) с учетом равенств (4) принимает вид:

$$\omega_i^j + \omega_i^3 = 0, \quad \omega_i^3 = a\,\omega_j, \quad \omega_i^3 - \omega_3^i = 0,$$

$$\omega_4^1 = a^2(\omega_1 + \omega_2), \quad \omega_4^2 = \omega_4^1, \quad \omega_4^3 = -\omega_4^1, \tag{5}$$

$$\omega_3^4 = 0, \quad \omega_i^i - \omega_3^3 = 0.$$

Осуществляя частичное продолжение системы уравнений (5), получаем уравнение Пфаффа

$$da + a(\omega_1^1 - \omega_4^4) = 0. \tag{6}$$

Система уравнений (5),(6), определяющая конгруэнции $\mathcal{G}_0$, вполне интегрируема.

Т е о р е м а. Конгруэнция $\mathcal{G}_0$ обладает следующими геометрическими свойствами: I/огибающие поверхности (P_i) граней $(A_j A_3 A_4)$ вырождаются в точки; 2/поверхности (A_i), (P_i^*) являются плоскостями; 3/фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1 и A_2; 4/точки пересечения касательных к линиям $\omega_1 - \omega_2 = 0$, $\omega_1 + \omega_2 = 0$ на поверхности (A_i) гармонически делят точки A_4 и K_i; 5/вершина A_3 является фокальной точкой коники C, дана геометрическая характеристика всех остальных фокальных точек коники C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Текущая точка P_i огибающей поверхности грани $(A_j A_3 A_4)$ определяется формулой

$$P_i = A_4 + aK_i. \tag{7}$$

Дифференцируя равенство (7), убеждаемся, что

$$dP_i = P_i(\omega_4^4 + a\omega_j),$$

т.е. точка P_i неподвижна.

2/Уравнения для определения асимптотических линий на поверхностях (A_i) и (P_i^*), где $P_i^* = A_4 - aK_i$, удовлетворяются тождественно, следовательно, поверхности (A_i), (P_i^*) являются плоскостями, причем плоскости (A_i) совпадают с плоскостями $(A_i A_4 K_i)$.

3/Фокусами луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) являются точки $E = A_1 + A_2$, $E^* = A_1 - A_2$.

4/Касательные к линиям $\omega_1 - \omega_2 = 0$, $\omega_1 + \omega_2 = 0$ на поверхности (A_i) определяются из условий

$$(dA_i)_{\omega_1 - \omega_2 = 0} = \omega_i^i A_i + P_i^* \omega_1,$$

$$(dA_i)_{\omega_1 + \omega_2 = 0} = \omega_i^i A_i + P_i \omega_1.$$

Эти касательные пересекают прямую A_4K_i в точках P_i^*, P_i, но

$$(A_4 K_i;\ P_i P_i^*) = -1.$$

5/Из системы уравнений [I]

$$x^3(-x^3(\omega_1 + \omega_2) + 2x^1\omega_2 + 2x^2\omega_1) = 0,$$
$$x^1\omega_1 + x^2\omega_2 = 0,$$
$$x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 = 0, \quad x^4 = 0$$

находим все шесть фокальных точек коники. Ими являются, кроме точек A_i, A_3, точки $\mathcal{F}_i = A_i - 2K_i^*$ пересечения прямой $A_iK_i^*$ с коникой и точка $\mathcal{F}_3 = 2E - A_3$ пересечения прямой EA_3 с коникой. Наиболее полно изучена поверхность (A_3) – огибающая поверхность плоскостей коник C конгруэнции $\mathcal{G}_0$.

Получено каноническое представление поверхности (A_3) в виде

$$az = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + [4],$$

где $x = \frac{x^1}{x^4}$, $y = \frac{x^2}{x^4}$, $z = \frac{x^3}{x^4}$, [4] – слагаемые, порядок малости которых не ниже 4.

Трехпараметрическое семейство соприкасающихся квадрик к поверхности (A_3) имеет вид:

$$2(xy - az) + 2a_{14}xz + 2a_{24}yz + a_{44}z^2 = 0.$$

Из этого семейства выделена квадрика Ли

$$2x^1x^2 - 2a\,x^3x^4 - a^2(x^4)^2 = 0.$$

Через каждую точку поверхности (A_3) проходят две асимптотические линии $\omega_1\omega_2=0$.Найдены соприкасающиеся линейные комплексы этих асимптотических линий,выделены специальные комплексы и их оси (директрисы Вильчинского).Оказывается, что директрисами Вильчинского,соответствующими данной точке A_3 поверхности (A_3),являются ребра A_3A_4 и A_1A_2 репера R .

Главными квадриками [2] поверхности (A_3),т.е.квадриками,которые имеют в данной точке соприкосновение четвертого порядка с каждой из асимптотических линий,проходящих через данную точку,являются квадрики

$$2x^1x^2-3a\,x^3x^4+a_{44}(x^4)^2=0.$$

Квадрики

$$a_{44}z^2+2(xy+z)=0$$

образуют пучок квадрик Дарбу.Первое ребро Грина и первая ось Чеха совпадают с первой директрисой Вильчинского A_3A_4. Следовательно,поверхность (A_3)является коинцидентной.

При пересечении квадрики Ли координатной плоскостью $x^3=0$ получается коника C^* ,уравнения которой имеют вид:

$$2x^1x^2-a^2(x^4)^2=0,$$
$$x^3=0.$$

Итак,имеем конгруэнцию (C^*) коник C^*,ассоциированную с конгруэнцией $\mathcal{G}_0$.Фокальными точками коники C^*,кроме точек A_1 и A_2,являются точки

$$\Phi_i=aE+(-1)^j\sqrt{2}\,A_4,\quad \Phi_i'=aS_i+2A_4,$$

причем точки Φ_i есть точки пересечения прямой EA_4 с коникой C^* ,а точки Φ_i'-это точки пересечения прямой S_iA_4 с коникой C^* ,где $S_i=2A_i+A_j$ есть точка пересечения прямых F_jK_i и A_1A_2.

Список литературы

I.М а л а х о в с к и й В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве."Тр.Томского ун-та",вып.3,I963,т.I68,с.43-53.

2.Щ е р б а к о в Р.Н. Курс аффинной и проективной геометрии.Томск,I960.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Е.В.С к р ы д л о в а

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ВТОРОГО РОДА, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРОЙ КОНИК

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные конгруэнции (двупараметрические семейства) второго рода [I],порожденные парой $\{C_1,C_2\}$ коник C_1 и C_2. Такие конгруэнции характеризуются тем,что размерность семейства (C_1,C_2) пар $\{C_1,C_2\}$ больше размерностей каждого из семейств (C_1) и (C_2) коник C_1 и C_2 соответственно,т.е.

$$\dim(C_1,C_2)>\dim(C_1),\quad \dim(C_1,C_2)>\dim(C_2). \qquad (1)$$

В силу неравенств (I),имеем:

$$\dim(C_1)=\dim(C_2)=1. \qquad (2)$$

При этом каждой конике C_i семейства (C_i) $(i,j=1,2;\ i\neq j)$ соответствуют все коники C_j семейства (C_j).

Построен геометрически фиксированный репер вырожденных конгруэнций (C_1,C_2).Исследован класс,в котором все коники семейств (C_i) инцидентны инвариантным квадрикам Q_i .Рассмотрен подкласс,в котором квадрики Q_1 и Q_2 пересекаются по четырехкратной прямой.

§I. Система пфаффовых уравнений вырожденных конгруэнций второго рода (C_1,C_2)

Отнесем пространство P_3 к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta. \qquad (1.1)$$

Формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0 . \tag{1.3}$$

Пусть ℓ -линия пересечения плоскостей коник C_1 и C_2. Совместим вершину A_i репера R с одной из точек пересечения прямой ℓ с коникой C_j, вершину A_{i+2} поместим в полюс прямой ℓ относительно коники C_i. Уравнения коник C_1 и C_2 и система уравнений Пфаффа вырожденных конгруэнций (C_1,C_2) относительно репера R записываются в виде:

$$(x^3)^2 - (a_1 x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0 , \quad x^4 = 0 ; \tag{1.4}$$

$$(x^4)^2 - (a_2 x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0 , \quad x^3 = 0 ; \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}
\omega_1^2 = \Gamma_1^2\omega_2, \quad \omega_2^1 = \Gamma_2^1\omega_1, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^3\omega_2, \quad \omega_i^4 = \Gamma_i^4\omega_1, \\
\omega_3^1 = \Gamma_3^1\omega_1 + \omega_2^3 , \quad \omega_3^2 = \Gamma_3^2\omega_1 + \omega_1^3 - (a_1)^2\omega_2^3 , \\
\omega_4^1 = \Gamma_4^1\omega_2 + \omega_2^4 - (a_2)^2\omega_1^4 , \quad \omega_4^2 = \Gamma_4^2\omega_2 + \omega_1^4 , \\
a_1\theta_1 = A_1\omega_1 + \omega_1^2 , \quad a_2\theta_2 = A_2\omega_2 + \omega_2^1 , \\
\Omega_1 = p\,\omega_1 , \quad \Omega_2 = q\,\omega_2 ,
\end{gathered} \tag{1.6}$$

где

$$\theta_i = da_i - a_i(\omega_i^i - \omega_{i+2}^{i+2}), \quad \Omega_i = -\omega_i^i - \omega_j^j + 2\omega_{i+2}^{i+2} , \tag{1.7}$$

и формы

$$\omega_1 \overset{def}{=} \omega_3^4 , \quad \omega_2 \overset{def}{=} \omega_4^3 \tag{1.8}$$

приняты в качестве базисных.

Произвол существования вырожденных конгруэнций второго рода $(C_1 C_2)$ -четырнадцать функций одного аргумента.

§2. Вырожденные конгруэнции второго рода $(C_1,C_2)^Q$

Определение 1. Вырожденные конгруэнции второго рода (C_1,C_2) будем называть конгруэнциями $(C_1,C_2)^Q$, если для них выполняются следующие условия: 1/все коники C_i семейства (C_i) принадлежат инвариантной квадрике Q_i ; 2/прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены относительно квадрик Q_1 и Q_2.

Уравнения квадрик Q_1 и Q_2, удовлетворяющих условиям определения 1, имеют вид:

$$Q_1 \equiv (x^3)^2 - (a_1x^1)^2 - 2x^1x^2 + a_{44}(x^4)^2 + 2a_{34}\,x^3x^4 = 0, \tag{2.1}$$

$$Q_2 \equiv (x^4)^2 - (a_2x^2)^2 - 2x^1x^2 + b_{33}(x^3)^2 + 2b_{34}\,x^3x^4 = 0 . \tag{2.2}$$

В силу инвариантности квадрик имеем

$$\omega_1^2 = 0 , \quad \omega_2^1 = 0 ; \tag{2.3}$$

$$\Omega_1 = 2a_{34}\omega_1 , \quad \Omega_2 = 2b_{34}\omega_2 ; \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\omega_3^1 = a_{34}\omega_2^4 + \omega_2^3 , \quad \omega_3^2 = b_{33}\omega_1^3 + b_{34}\omega_1^4 , \\
\omega_4^1 = a_{44}\omega_2^4 + a_{34}\omega_2^3 , \quad \omega_4^2 = b_{34}\omega_1^3 + \omega_1^4 ;
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$$a_1\theta_1 + (a_1)^2a_{34}\omega_1 = 0 , \quad a_2\theta_2 + (a_2)^2b_{34}\omega_2 = 0 ; \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned}
(a_1)^2\omega_3^1 + \omega_3^2 - a_{34}\omega_1^4 - \omega_1^3 = 0 ; \ (a_2)^2\omega_4^2 + \omega_4^1 - b_{34}\omega_2^3 - \omega_2^4 = 0 ; \\
(a_1)^2\omega_4^1 + \omega_4^2 - a_{44}\omega_1^4 - a_{34}\omega_1^3 = 0 ; \ (a_2)^2\omega_3^2 + \omega_3^1 - b_{33}\omega_2^3 - b_{34}\omega_2^4 = 0 ;
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned}
da_{34} + a_{34}(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \omega_2 - a_{44}\omega_1 + 2(a_{34})^2\omega_1 = 0, \\
db_{34} + b_{34}(\omega_4^4 - \omega_3^3) - b_{33}\omega_2 - \omega_1 + 2(b_{34})^2\omega_2 = 0, \\
\tfrac{1}{2}da_{44} + a_{44}(\omega_3^3 - \omega_4^4) - a_{34}\omega_2 + a_{34}a_{44}\omega_1 = 0, \\
\tfrac{1}{2}db_{33} + b_{33}(\omega_4^4 - \omega_3^3) - b_{34}\omega_1 + b_{33}b_{34}\omega_2 = 0 .
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Подсистема уравнений (2.7) приводит к следующим соотношениям:

$$(a_1)^2 a_{34}\Gamma^4_2-(a_{34}-b_{34})\Gamma^4_1=0, \qquad (a)$$
$$(a_1)^2\Gamma^3_2+(b_{33}-1)\Gamma^3_1=0, \qquad (b)$$
$$(a_1)^2 a_{44}\Gamma^4_2+(1-a_{44})\Gamma^4_1=0, \qquad (c)$$
$$(a_1)^2 a_{34}\Gamma^3_2+(b_{34}-a_{34})\Gamma^3_1=0, \qquad (d)$$
$$(a_2)^2\Gamma^4_1+(a_{44}-1)\Gamma^4_2=0, \qquad (e)$$
$$(a_2)^2 b_{34}\Gamma^3_1+(a_{34}-b_{34})\Gamma^3_2=0, \qquad (f)$$
$$(a_2)^2 b_{34}\Gamma^4_1+(a_{34}-b_{34})\Gamma^4_2=0, \qquad (g)$$
$$(a_2)^2 b_{33}\Gamma^3_1+(1-b_{33})\Gamma^3_2=0. \qquad (h)$$

Из равенств $(b),(d)$ и $(e),(g)$ получим

$$\Gamma^3_1(b_{34}-b_{33}a_{34})=0,\ \Gamma^4_2(a_{34}-a_{44}b_{34})=0. \qquad (2.9)$$

В дальнейшем целесообразно рассматривать вырожденные конгруэнции $(C_1C_2)^Q$ отдельно в каждом из следующих четырех случаев:

$$\text{I}:\ \Gamma^3_1=0,\Gamma^4_2=0; \qquad \text{II}:\ \Gamma^3_1\Gamma^4_2\neq 0;$$
$$\text{III}:\ \Gamma^3_1=0,\Gamma^4_2\neq 0; \qquad \text{IV}:\ \Gamma^3_1\neq 0,\Gamma^4_2=0,$$

причем случаи III и IУ приводят к проективно эквивалентным классам конгруэнций $(C_1,C_2)^Q$, а случай I является тривиальным, так как прямые A_1A_2 и A_3A_4 для него неподвижны.

Более подробно рассмотрим случай III. Для него будем иметь

$$\Gamma^3_1=0,\ \Gamma^4_1=0,\ \Gamma^3_2\Gamma^4_2\neq 0, \qquad (2.10)$$

тогда из соотношений $(a)-(h)$

$$a_1=0,\ a_{44}=b_{33}=1,\ a_{34}=b_{34}\overset{def}{=}\lambda. \qquad (2.11)$$

Система уравнений (2.8) приводит к равенству:

$$d\lambda+(\lambda^2-1)(\omega^1+\omega^2)=0. \qquad (2.12)$$

Система уравнений Пфаффа вырожденных конгруэнций $(C_1,C_2)^Q$ и уравнения квадрик Q_1 и Q_2 окончательно принимают вид:

$$\begin{gathered}\omega^i_i=0,\ \omega^3_1=0,\ \omega^4_1=0,\ \omega^3_2=\Gamma^3_2\omega_2,\ \omega^4_2=\Gamma^4_2\omega_1,\\ \omega^1_3=\lambda\omega^4_2+\omega^3_2,\ \omega^2_3=0,\ \omega^1_4=\omega^4_2+\lambda\omega^3_2,\ \omega^2_4=0,\\ a_2\theta_2+(a_2)^2\lambda\omega_2=0,\ \Omega_1=2\lambda\omega_1,\ \Omega_2=2\lambda\omega_2,\\ d\lambda+(\lambda^2-1)(\omega_1+\omega_2)=0;\end{gathered} \qquad (2.13)$$

$$\Theta_1\equiv(x^3)^2-2x^1x^2+2\lambda x^3x^4+(x^4)^2=0; \qquad (2.14)$$

$$Q_2\equiv(x^4)^2-2x^1x^2+2\lambda x^3x^4+(x^3)^2-(a_2x^2)^2=0. \qquad (2.15)$$

Произвол существования вырожденных конгруэнций $(C_1,C_2)^Q$ этого типа-две функции одного аргумента. Линия пересечения квадрик Q_1 и Q_2 задается уравнениями

$$(x^3)^2+(x^4)^2+2\lambda x^3x^4=0,\ (x^2)^2=0, \qquad (2.16)$$

т.е. является парой сдвоенных прямых, проходящих через точку A_1 и лежащих в плоскости $(A_1A_3A_4)$.

Т е о р е м а I. 1/Точка A_1 и плоскость $(A_1A_3A_4)$ неподвижны. 2/Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) образуют двусторонне расслояемую пару.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Так как

$$dA_1=\omega^1_1A_1,\ d(A_1A_3A_4)=(\omega^1_1+\omega^3_3+\omega^4_4)(A_1A_3A_4),$$

то точка A_1 и плоскость $(A_1A_3A_4)$ неподвижны.
2/Условия двустороннего расслоения прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) в силу системы (2.13) удовлетворяются тождественно.

В частном случае, когда

$$\lambda^2-1=0, \qquad (2.17)$$

квадрики Q_1 и Q_2 являются конусами с общей вершиной $K=\lambda A_3-A_4$ и общей прямолинейной образующей A_1K.

Семейство прямых A_3A_4 в этом случае является однопараметрическим, так как

$$d[A_3A_4]=(\omega_3^3+\omega_4^4)[A_3A_4]+\omega_3^1([A_1A_4]-\lambda[A_1A_3]).$$

Рассмотрим плоскость $(A_1A_2K^*)$, где K^* вместе с K гармонически разделяет вершины A_3 и A_4. Эта плоскость описывает двупараметрическое семейство и пересекает конусы Q_1 и Q_2 соответственно по коникам

$$C^*:\begin{cases} 2(x^4)^2-x^1x^2=0, \\ x^3-\lambda x^4=0; \end{cases} \qquad C^{**}:\begin{cases} 4(x^4)^2-2x^1x^2-(a_2x^2)^2=0, \\ x^3-\lambda x^4=0, \end{cases}$$

каждая из которых описывает конгруэнцию.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции (C^*) и (C^{**}) коник C^* и C^{**} соответственно расслояемы к однопараметрическому семейству прямых A_3A_4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия расслоения от конгруэнций (C^*) и (C^{**}) к линейчатому многообразию (A_3A_4) удовлетворяются тождественно, что и доказывает теорему.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Е.П. С о п и н а

КОНГРУЭНЦИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРКВАДРИК В n-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассмотрены $(n-1)$-мерные многообразия (конгруэнции) V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик Q. Исследованы поля некоторых геометрических объектов на V_{n-1}. Для конгруэнций эллипсоидов в A_3, имеющих фокальную конгруэнцию коник с центром в центре эллипсоидов, получено безынтегральное представление.

§1. Поля геометрических объектов на многообразии V_{n-1}

Отнесем конгруэнцию V_{n-1} к реперу $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\dots,\bar e_n\}$, где A -центр гиперквадрики Q. Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$d\bar A=\omega^\alpha\bar e_\alpha,\quad d\bar e_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar e_\beta\quad(\alpha,\beta,\gamma=1,2,\dots,n),\tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha,\quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta.\tag{1.2}$$

Уравнение гиперквадрики Q запишется в виде

$$F\equiv a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta-1=0,\tag{1.3}$$

$$\det\|a_{\alpha\beta}\|\neq 0,\quad a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}.\tag{1.4}$$

Исключая из рассмотрения конгруэнции V_{n-1} с вырождающейся гиперповерхностью центров (A), примем ω^i $(i,j,k=1,2,\dots,n-1)$ за независимые первичные формы конгруэнции. Система уравнений Пфаффа конгруэнции V_{n-1} принимает вид: