DUAL NORMAL CONNECTIONS ON THE HYPERBAND DISTRIBUTION

Normal connections on normalized holonomic submanifolds, submerged into different spaces, were considered in the works of some geometricians. Similar researches on non-holonomic submanifolds haven't been carried out by mathematicians so far. The present work covers dual centre projective connections in normal fiberings on a non-holonomic submanifold, that is on the hyperband distribution, submerged into the space of the projective connection.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ n-ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^{2n+1}

М.А. Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)

В евклидовом пространстве E^{2n+1} рассматриваются две гладкие n-поверхности $M, \overline{M}$ и диффеоморфизм $f{:}M \to \overline{M}$. Исследуется случай, когда касательные n-плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \overline{M}$ ортогональны, $\overline{pf(p)}$ – общая нормаль, причем $|\overline{pf(p)}|=\rho=\mathrm{const}$. Назовем такое преобразование f преобразованием B.

Теорема 1. Если f есть преобразование B, то имеет место равенство

$$\langle R^{\perp}(X,Y)df\,Z, df\,W\rangle = \overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z - \frac{1}{\rho^2}\overline{g}(Y,Z)X + \frac{1}{\rho^2}\overline{g}(X,Z)Y, W),$$

где $\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z$

– кривизна связности Леви-Чивита метрики $\overline{g}(X,Y)=\langle df\,X, df\,Y\rangle$, $\langle,\rangle$–скалярное произведение в E^{2n+1},

$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$

–кривизна нормальной связности $\nabla^{\perp}$, $X,Y,Z,W \in TM$.

Теорема 2. Если f есть преобразование B, то следующие утверждения эквивалентны: 1) поверхности M, $\overline{M}$ имеют плоские нормальные связности; 2) M, $\overline{M}$ локально есть пространства постоянной кривизны $\frac{1}{\rho^2}$.

1. Основные формулы. Пусть M, $\overline{M}$ – две гладкие n-поверхности в евклидовом пространстве E^{2n+1}, $f{:}M \to \overline{M}$ – диффеоморфизм, $F(M)$ – R-алгебра дифференцируемых на M функций, $T^q_s(M)$ –F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q,s), ∂ –дифференцирование в E^{2n+1}.

Формулы Гаусса-Вейнгартена поверхности M имеют вид [1,с.23]

$$\partial_X Y=\nabla_X Y+\alpha(X,Y),\ \partial_X\xi=-A_\xi X+\nabla^{\perp}_X \xi, \tag{1}$$

где $X,Y\in T^1_0(M)$, ∇–связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y)=<X,Y>$,α– вторая фундаментальная форма поверхности M, $\nabla^{\perp}$ – нормальная связность, $A_\xi \in T^1_1(M)$ – оператор Вейнгартена, соответствующий полю $\xi\in TM^{\perp}$. Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$R(X,Y)Z=A_{\alpha(Y,Z)}X-A_{\alpha(X,Z)}Y,\ R^{\perp}(X,Y)\xi=\alpha(X, A_\xi Y)-\alpha(Y, A_\xi X), \tag{2}$$
$$< R^{\perp}(X,Y)\xi,\nu>=g([A_\xi,A_\nu]X,Y),$$

где [,] – коммутатор матриц.

Обозначим через r – радиус-вектор точки $p\in M$, через $\bar{r}$ – радиус-вектор точки $f(p)\in \bar{M}$, через τ – орт нормали $\overline{pf(p)}$. Тогда отображение $f:M\to\bar{M}$ запишется в виде

$$\bar{r}=r+\rho\tau. \tag{3}$$

Дифференциал отображения f определится из равенства

$$df(X)=df(\partial_X r)=\partial_X \bar{r},\ X\in TM.$$

Дифференцируя (3) и используя (1), получим

$$df(X)=(X-\rho A_\tau X)+\rho\nabla^{\perp}_X\tau.$$

Так как $(dfX)_{f(p)}\perp\tau$ и $(dfX)_{f(p)}\perp T_pM$, то получим

$$X-\rho A_\tau X=0,\ df\,X=\rho\nabla^{\perp}_X\tau. \tag{4}$$

Обозначим через N – векторное расслоение над M, слой которого $E_p=T_{f(p)}\bar{M}^{\perp}$.Пусть $\bar{\nabla}$ – связность на M, удовлетворяющая условию

$$(\partial_X df(Y))_p-(df(\bar{\nabla}_X Y))_p=\bar{\alpha}(X,Y)_p\in E_p. \tag{5}$$

Лемма 1. Связность $\bar{\nabla}$ есть связность Леви-Чивита метрики $\bar{g}$, а векторнозначная билинейная форма $\bar{\alpha}$ –симметричная.

Доказательство. Имеем

$$Z\bar{g}(X,Y)=<\partial_Z df\,X,df\,Y>+<df\,X,\partial_Z df\,Y>=<df\,\bar{\nabla}_Z X+\bar{\alpha}(Z,X),df\,Y>+$$
$$+<df\,X,df\,\bar{\nabla}_Z Y+\bar{\alpha}(Z,Y)>.$$

Откуда

$$Z\bar{g}(X,Y)=\bar{g}(\bar{\nabla}_Z X,Y)+\bar{g}(X,\bar{\nabla}_Z Y),$$

т.е.связность $\bar{\nabla}$ согласована с метрикой $\bar{g}$. Так как

$$\partial_X df\,Y=\partial_X\partial_Y\bar{r},\ \partial_X\partial_Y\bar{r}-\partial_Y\partial_X\bar{r}-1\partial_{[X,Y]}\bar{r}=0,$$

то получим

$$df\bar{\nabla}_X Y-df\bar{\nabla}_Y X-df[X,Y]+\bar{\alpha}(X,Y)-\bar{\alpha}(Y,X)=0.$$

Приравнивая нулю касательные и нормальные составляющие к $\bar{M}$, получим

$$df(\bar{\nabla}_X Y-\bar{\nabla}_Y X-[X,Y])=0,\ \bar{\alpha}(X,Y)-\bar{\alpha}(Y,X)=0.$$

Так как f – диффеоморфизм, то $\overline{\nabla}_X Y-\overline{\nabla}_Y X-[X,Y]=0$, $\overline{\alpha}(X,Y)-\overline{\alpha}(Y,X)=0$, т.е. кручение связности $\overline{\nabla}$ равно нулю. Следовательно, $\overline{\nabla}$ – есть связность Леви-Чивита метрики $\overline{g}$, а билинейная форма $\overline{\alpha}$ – симметричная.

Лемма 2. Тензор кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$ удовлетворяет равенству

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W)=<\overline{\alpha}(Y,Z),\overline{\alpha}(X,W)>-<\overline{\alpha}(X,Z),\overline{\alpha}(Y,W)>.$$

Доказательство. Имеем

$$\partial_X\partial_Y df(Z)-\partial_X df\overline{\nabla}_Y Z=\partial_X\overline{\alpha}(Y,Z).$$

Так как связность ∂ плоская, то

$$\partial_X\partial_Y df(Z)-\partial_Y\partial_X df(Z)-\partial_{[X,Y]}df(Z)=0.$$

Откуда

$$df\overline{R}(X,Y)Z=\overline{\alpha}(X,\overline{\nabla}_Y Z)-\overline{\alpha}(Y,\overline{\nabla}_X Z)+\partial_X\overline{\alpha}(Y,Z)-\partial_Y\overline{\alpha}(X,Z)+\overline{\alpha}([X,Y],Z).$$

Умножая скалярно на df W, получим

$$<df\overline{R}(X,Y)Z,df\,W>=<\partial_X\overline{\alpha}(Y,Z),df\,W>-<\partial_Y\overline{\alpha}(X,Z),df\,W>.$$

Дифференцируя равенство $<\overline{\alpha}(Y,Z),df\,W>=0$, получим

$$<\partial_X\overline{\alpha}(Y,Z),df\,W>+<\overline{\alpha}(Y,Z),\partial_X df\,W>=0.$$

Используя (5), получим

$$<\partial_X\overline{\alpha}(Y,Z),df\,W>+<\overline{\alpha}(Y,Z),\overline{\alpha}(X,W)>=0.$$

Откуда следует лемма.

Рассмотрим разложение $\overline{\alpha}(X,Y)^{T}+\overline{\alpha}(X,Y)^{\perp}$, где $\overline{\alpha}^{T}\in TM$, $\overline{\alpha}^{\perp}\in TM^{\perp}$.

Лемма 3. Если f преобразование B, то

$$\overline{\alpha}(X,Y)^{\perp}=-\tfrac{1}{\rho}\overline{g}(X,Y)\tau,\quad \overline{\alpha}(X,Y)^{T}=-A_{\Omega Y}X,$$

где $\Omega Y=df\,Y\in TM^{\perp}$.

Доказательство. Имеем

$$\overline{\alpha}(X,Y)=\partial_X\Omega Y-\Omega\overline{\nabla}_X Y=-A_{\Omega Y}X+\nabla^{\perp}_X\Omega Y-\Omega\overline{\nabla}_X Y,$$

откуда

$$\overline{\alpha}(X,Y)^{T}=-A_{\Omega Y}X,\quad \overline{\alpha}(X,Y)^{\perp}=\nabla^{\perp}_X\Omega Y-\Omega\overline{\nabla}_X Y=\rho(\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\tau-\nabla^{\perp}_{\overline{\nabla}_X Y}\tau).$$

Если f – преобразование B, то $\overline{\alpha}(X,Y)^{\perp}=\beta(X,Y)\tau$, $\beta\in T^0_2(M)$, откуда $\beta(X,Y)=<\overline{\alpha}(X,Y)^{\perp},\tau>$. Так как $|\tau|=1$, то

$$<\nabla^{\perp}_Y\tau,\tau>=0,\ <\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\tau,\tau>+<\nabla^{\perp}_X\tau,\nabla^{\perp}_Y\tau>=0.$$

В силу (4) имеем

$$\beta(X,Y)=-\rho<\nabla^{\perp}_X\tau,\nabla^{\perp}_Y\tau>=-\tfrac{1}{\rho}<\Omega X,\Omega Y>=-\tfrac{1}{\rho}\overline{g}(X,Y).$$

Доказательство теоремы 1. В силу лемм 2,3 имеем

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W)=\tfrac{1}{\rho^2}\overline{g}(Y,Z)\overline{g}(X,W)-\tfrac{1}{\rho^2}\overline{g}(X,Z)\overline{g}(Y,W)+$$
$$+<A_{\Omega Z}Y,A_{\Omega W}X>-<A_{\Omega Z}X,A_{\Omega W}Y>.$$

Так как в силу (2)

$$<A_{\Omega Z}Y,A_{\Omega W}X>-<A_{\Omega Z}X,A_{\Omega W}Y>=<[A_{\Omega Z},A_{\Omega W}]X,Y>=<\overline{R}^{\perp}(X,Y)\Omega Z,\Omega W>,$$

то получим теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 1 вытекает, что если нормальная связность $\nabla^{\perp}$ плоская, то $\overline{R}(X,Y)Z=\frac{1}{\rho^2}(\overline{g}(Y,Z)X-\overline{g}(X,Z)Y)$, т.е. $\overline{M}$ локально есть пространство постоянной кривизны $\frac{1}{\rho^2}$. Обратно, если $\overline{M}$ есть пространство постоянной кривизны $\frac{1}{\rho^2}$, то $<R^{\perp}(X,Y)\Omega Z,\Omega W>=0$. Пусть X_i, $i=1,...,n$ – базис T_pM. Тогда $\Omega_i=\Omega X_i$, τ–базис $T_p^{\perp}$. Имеем $<R^{\perp}(X_i,X_j)\Omega_k,\Omega_m>=0$. В силу (4) $[A_\tau,A_\Omega]=0$, т.е. $R^{\perp}=0$, нормальная связность $\nabla^{\perp}$ – плоская. В силу симметричности построения получаем утверждение теоремы.

Библиографический список.

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.:Наука, 1987. Т.2. 414с.

M. A. C h e s h k o v a

TO GEOMETRY N-SURFACES IN A EUCLIDEAN SPACE E^{2n+1}

In a Euclidean space E^{2n+1} are considered two smooth n–Surfaces M, $\overline{M}$ and diffeomorphism $f:M\to\overline{M}$. Case, when tangents n-planes in is investigated appropriate points $p\in M$, $f(p)\in\overline{M}$ are orthogonal, $\overline{pf(p)}$ normal to M and normal to $\overline{M}$, and $|\overline{pf(p)}|$=const. We shall name such transformation f as transformation B.

Theorem. If f there is the transformatiom B, the following two statements are equivalent: 1) surfaces M,$\overline{M}$ have of plane normal connection; 2) M,$\overline{M}$ locally there is the space of constant curvature $\frac{1}{\rho^2}$.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ФОКАЛЬНЫМ ТЕТРАЭДРОМ

С. В. Ш м е л е в а

(*Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота*)

В трехмерном проективном пространстве $\mathbf{P_3}$ исследован класс **T** конгруэнций невырожденных линейчатых квадрик **Q**, четыре фокальные точки $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, которых образуют автополярный тетраэдр третьего рода квадрики **Q** [1, с.