

КАНТ И СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Математическое знание, как и всякое другое, представляет единство формального и содержательного моментов и возникает путем подведения эмпирического материала под заранее выработанные и заготовленные формы. Даже абстрагирование и идеализация — основные методы выработки понятий классической математики — являются способами представления эмпирического материала, причем такими, в которых определяющую роль играет содержательный аспект, а формальные стороны отходят на задний план. Формальный фон становится объектом исследования тогда, когда вдруг обнаруживается недостаточность существующих вариантов представления и организации эмпирических констатаций и, следовательно, возникает необходимость в новых формах и методах.

Г. Лейбниц, а вслед за ним И. Кант¹ были первыми, кто заметил тенденцию формализации математики и на этой основе быть поставщиком новых форм переработки исходного материала для себя и для других наук. «Математика и физика, — пишет Кант, определяя предмет этих наук, — это две теоретические области познания разумом, которые должны определять свои объекты a priori, первая совершенно чисто, вторая по крайней мере отчасти»². Поставляемые математикой формы носят не зависимый от всякого опыта, то есть «всякого синтетического единства восприятий»³, характер; создаются, существуют до открытия той предметной области, в которой найдут свое применение. Это — формально построенные конструкции: «Философское познание есть познание разумом посредством понятий, а математическое знание есть познание посредством конструирования понятий»⁴. Математика конструирует величины, дефиниции, суждения, доказа-

¹ В нашей литературе сложилось представление, что идеи Г. Лейбница о формализации математики и логики «были забыты» после смерти Лейбница вплоть до работ Д. Булля. (См., например, ст. Г. И. Рузавина и П. В. Таганца в сб. *Философские вопросы современной формальной логики*. М., Изд-во АН СССР, 1962, с. 32.).

² Кант И. Соч., т. 3, с. 84.

³ Там же, с. 254.

⁴ Там же, с. 600.

тельства. «Даже действия алгебры с уравнениями, из которых она посредством редукции получает истину вместе с доказательством, представляет собой если не геометрическое, то все же конструирование с помощью символов, в котором понятия, в особенности понятия об отношении между величинами, выражены в созерцании знаками»¹, — пишет Кант в этой связи. Синтез, соединение форм с эмпирическим материалом, необходим, но он носит формальный характер: он нужен, как и всякий метод, только для достижения определенных результатов — по Канту, формы математики доставляют эмпирическим данным атрибуты всеобщности, абсолютности, необходимости. Вне этого процесса они теряют смысл, об их ложности или истинности говорить не приходится, речь может идти только об эффективности. «Все математические понятия сами по себе — не знания, если только не предполагать, что существуют формы, которые могут представляться нам только сообразно с формой этого чистого чувственного созерцания»². Конструируемые исчисления дают возможность представить исходный материал в новом свете, обнаружить новые стороны, так что математика превращается в орудие отыскания новых истин. Математика должна быть наукой об отношениях, формах и операциях преобразования любого эмпирического материала, рассматриваемых самих по себе, независимо от предметов, к которым они могут применяться. Практическое воплощение такого представления о математике в систематической форме началось в работах Д. С. Булля. В настоящее время эта тенденция математики превратилась в ее определяющую функцию.

Таким образом, И. Кант принадлежит к первым философам, которым в общих чертах удалось отразить одну из фундаментальнейших функций математики — тенденцию формализации.

Однако в тот период тенденция формализации находилась в стадии общих рассуждений. Математики не знали геометрии Лобачевского, алгебра Булля будет еще создана, математическая логика занимала скромное место в логических исследованиях. В математике господствовало содержательное направление. Образцом построения математических теорий считалась геометрия Евклида. Поэтому акцентирование внимания на формализации неизбежно приводило к абсолютизации, а перенос идей формализации в сферу философии приводил, как это было и у Канта, к идеалистическим спекуляциям.

Выделение новой функции, иной предметной области математики заставило Канта искать гносеологические основы этой, тогда еще третьестепенной, части математики. Как возможна математика? Точнее было бы сказать: как возможна математика в виде науки о все-

¹ Кант И. Соч., т. 3, с. 615.

² Там же, с. 201.

общих, абсолютных и необходимых формах и операциях эмпирического материала? Решение сенсуалистами и рационалистами этого вопроса не устраивало Канта. И хотя ему не удалось решить этой проблемы, заслуга Канта — в ее постановке.

Для материалистов проблема совмещения всеобщности, необходимости, абсолютности с единичностью, условностью, относительностью чувственного данного не представлялась столь трудной, как для Канта. Решение проблемы основывалось на двух предпосылках — онтологической и гносеологической.

Первая из них видела во всяком явлении, а значит, и в чувственном опыте единство общего и единичного, абсолютного и относительного, условного и безусловного. Так что достаточно абстрагироваться (к этому сводилась вторая предпосылка), отвлечься от единичного, случайного, относительного, чтобы получить в чистом виде общее, необходимое, абсолютное. И действительно, в случае классической математики генезис основных ее понятий можно было проследить на базе теории абстрагирования. Такие объекты математики, как точки, прямые, плоскости; операции сложения и вычитания; положительное, отрицательное, дробное и так далее, даже в своем названии несут печать эмпирического происхождения через трудный путь абстрагирования, выделения общего, отвращения от частного, единичного, случайного.

Несомненен и тот факт, что математика некогда была эмпирической наукой. Это дало основание Ф. Энгельсу определить математику как абстрактную науку о количественных отношениях и пространственных формах: «Но совершенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами своего собственного творчества и воображения. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны подвергаться сравнению, прежде чем можно было перейти к понятию фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал... Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевывать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное. Таким путем мы получаем точки, лишенные измерения, линии, лишенные толщины и ширины...»¹

Простота, легкость и достоверность решения проблемы, которая представлялась Канту трудной, обеспечила теории абстрагирования в генезисе всеобщих форм классической математики необыкновенный успех вплоть до наших дней. Существует до сих пор глубочайшее

¹ Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 37.

убеждение, что «все математические объекты получены отвлечением»¹.

Но в математике произошли большие изменения. Она переживает в настоящее время новый этап развития, связанный с формализацией всех ее структурных компонентов. На первый план выходит синтаксический аспект математических объектов и получает самостоятельное развитие. Формализация становится идеалом строгости, точности и логичности. В результате создаются такие математические схемы, конструкции, языковые каркасы, реального аналога которым в природе нет или его находят спустя некоторое время. Меняются функции математики: сейчас это — не просто орудие расчета, но наиболее адекватный язык для формулировки основных законов. Расширяется предмет математики: он уже не ограничивается классическими объектами, а охватывает векторы, кватернионы, тензоры, поливекторы, операторы и так далее. В центре исследования оказывается изучение отношений, структур произвольных объектов, операций, переменных отношений. Математика ныне рассматривается как особая деятельность людей. Для Гильберта математика скорее занимается знаками, знаковой деятельностью людей, нежели природными явлениями. Все настойчивее становится убеждение, что математика не изучает эмпирически данную реальность саму по себе, но она не изучает и образы этой реальности². Но между тем в своих практических приложениях в сфере материального производства она все более становится непосредственной производительной силой. Вся современная техника в значительной мере основана на результатах и практическом применении математических исследований. И поскольку техника бурно прогрессирует, то столь же быстро, а в ряде случаев и намного быстрее идет развитие отраслей математики, которые теоретически прогнозируют перспективы обновления производительных сил общества.

Как же возможна современная математика, «непостижимая эффективность математики в естественных науках»³? С позиций теории абстрагирования это представляется удивительным, мистическим, поскольку основные достижения современной математики обеспечены формализацией, а формализация является способом «исключения абстракций из теории»⁴.

Критика теории абстрагирования как единственной гносеологической предпосылки современных математических форм началась с первыми открытиями парадоксов теории множеств, когда основ-

¹ См., например, ст. П. К. Рашковского в сб. Математическое просвещение, 1960, № 5, с. 74—75, а также Л. Г. Антипенко — Проблема физической реальности, М., «Наука», 1973, с. 131.

² См., например, Реньи А. Диалог о математике. М., «Мир», 1969.

³ Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., «Мир», 1971, с. 182—198.

⁴ Харин Н. Н. Математическая логика и теория множеств. М., Росвузиздат, 1963, с. 125.

ные направления математики обрушились против абстракции актуальной бесконечности, видя в этой абстракции причину теоретико-множественных противоречий. Актуальная бесконечность не является только абстракцией¹, а значит, математика должна покоиться и на иных основаниях, чем ее классический вариант. Самое простое исследование показывает, что свойства, которыми наделяет свои объекты классическая математика, у реальных предметов или совершенно отсутствуют, или существуют в ином виде. Так, ни геометрических точек, ни плоскостей, ни прямых не существует в природе. Эти понятия не могут быть образованы путем простого отвлечения от свойств реальных предметов. Что касается современной математики, то ее теоретический аппарат так же, как в математической логике, «не выведен из эмпирического анализа объекта, а, так сказать, привнесен извне»². Следовательно, даже с помощью идеализации мы не в состоянии объяснить генезис современных математических форм, ибо идеализация предполагает в качестве составного элемента абстракцию.

Таким образом, история математики как бы повторяется, переживает своеобразное «отрицание отрицания», вернувшись к проблемам, поставленным Кантом. И сейчас, с высоты времени, удастся правильно оценить вклад Канта в гносеологическое обоснование математики.

Кант осуществил критику сенсуалистической концепции математического знания с ее теорией абстрагирования. Его определение элементов математического знания как априорных — это скорее отрицательная реакция на существовавшие в то время варианты гносеологии математики, чем позитивная программа. По отношению к математическому знанию «априорное» — это синоним «нечувственного», а — не «неданного» в природе, как это утверждают критики Канта «справа», ибо Кант не сомневался в объективности математических форм³. Не зная, однако, иной связи с внешним миром, кроме ощущений, Кант склонился к агностицизму. После Канта стало ясно, что математика нуждается в новых гносеологических основаниях. Но конструктивные шаги в этом направлении сделали классики марксизма, увидев в практике основу, предмет, источник знания (в том числе и математического).

В «Экономическо-философских рукописях 1844 года» К. Маркс впервые сформулировал взгляд на человека как на существо практическое: внутренний мир человека, человеческое сознание порождены

¹ См.: Пуанкаре А. Математика и логика. — В кн.: Новые идеи в математике. Т. 1, СПб., «Образование», 1913, с. 147.

² Таванец П. В. и Швырев В. С. Логика научного познания. В кн.: Проблемы логики научного познания. М., «Наука», 1964, с. 29.

³ См., например, «Критику чистого разума» И. Канта. Соч., т. 3, с. 240.

и обусловлены его предметно-чувственной деятельностью¹. В «Капитале» эта мысль воплощена в известной формуле, согласно которой человек, практически изменяя «внешнюю природу», тем самым изменяет свою внутреннюю природу².

Ф. Энгельс в «Диалектике природы» отмечал, что «как естествознание, так и философия до сих пор совершенно пренебрегали исследованием влияния деятельности человека на его мышление» и что «существенной и ближайшей основой человеческого мышления является как раз изменение природы человеком, а не природа как таковая, и разум человека развился соответственно тому, как человек научился изменять природу»³.

Психологические исследования влияния практики на мышление подтвердили идеи К. Маркса и Ф. Энгельса о практической основе человеческого мышления. Работами А. Валлона и Ж. Пиаже, а также советского психолога П. С. Выгодского было экспериментально доказано, что словеснологическое мышление развивается из практических операций с предметами внешнего мира путем интериоризации прежде всего внешних предметных действий в действия внутренние, духовные. Созданный в процессе оперирования предметами внешнего мира внутренний механизм регуляции руками, ногами и так далее со временем обретает относительную самостоятельность и переключается с внешних предметов на явления духовные — ощущения, мысли, язык. В этом состоит факт интериоризации внешних действий во внутренние действия с образами и символами вещей⁴. А. И. Леонтьев выдвинул гипотезу о принципиальной общности структуры внешней и внутренней деятельности⁵. П. Я. Гальперин показал, что умственные действия формируются в порядке овладения исторически сложившимися действиями⁶.

Результаты психологии о влиянии практики на мышление можно обобщить на логику и гносеологию. Интериоризация является универсальным механизмом отражения логической структуры мира в форме современной логики и математики. Законы логики, операции математические и логические формализмы являются в своем генезисе не абстракциями, а интериоризациями свойств и структуры предметной (в частности, расчетной) деятельности.

История создания многочисленных формализмов показывает, что

¹ Маркс К. и Энгельс Ф. Из ранних произведений. М., Госполитиздат, 1956, с. 627, 630, 631.

² См.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 23, с. 188.

³ Энгельс Ф. Диалектика природы. М., Госполитиздат, 1955, с. 185.

⁴ См.: Пиаже Ж., Инельдер Б. Генезис элементарных логических структур. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1963.

⁵ См.: Леонтьев А. Н. Проблемы развития психики. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.

⁶ См.: Гальперин П. Я. Основные результаты исследований по проблеме формирования умственных действий и понятий. М., Изд-во МГУ, 1965.

их возникновению предшествует эпоха сложных и громоздких вычислений, приводящих к тем же результатам, что и расчеты на базе новых исчислений. Интериоризированные формы повторяют структуру уже существующих вычислений, но они более просты и эффективны за счет адекватного сокращения структуры прежних расчетов. За каждой внутренней математической операцией исчисления скрываются развернутые действия с символами, которые предварительно были известны науке. Именно интериоризация многочисленных решений систем уравнений привела к созданию матричного исчисления. Термодинамический формализм Гиббса вырос на базе обычных расчетов тепловых балансов. Навыки оперирования коэффициентами Лямэ привели к созданию тетрадного формализма. Без многочисленных расчетов поведения электронов в электромагнитном поле на базе уравнений Шредингера, Дирака немислимо появление фейнмановского диаграммного формализма и так далее. В этой связи является резонной попытка определить математику и логику — основных поставщиков формализмов высокой степени сложности — теориями знаковой деятельности. Теоретик, создающий формализм, исследует не самое действительность, а движение информации о действительности.

Интериоризация как способ отражения интересна тем, что дает возможность отражать формы явлений, минуя их воспроизведение в сфере наглядного чувственного опыта. Интериоризируя предметную деятельность, мы фиксируем внутренние стороны материальных явлений, недоступные чувственному восприятию — ведь в предметной деятельности человек оперирует реальными предметами не по законам своей физиологической деятельности, не по своей воле, представлению или видимости явлений, а по законам, присущим самим реальным предметам, так что в ходе интериоризации в нашем сознании воспроизводятся природные закономерности. Формы нашего мышления, следовательно, даются практической деятельностью, в ходе которой предмет познания как бы «снимает» свою структуру и переключается внутрь человека. Мы познаем сущностные стороны вещей по мере того, как научаемся их использовать. В этой особенности интериоризации лежит ключ к опровержению агностицизма Канта. Интериоризация является той формой отражения, которая «схватывает» сущность «вещей в себе». Этого И. Кант не знал и знать не мог.