несении нормали 2-го рода Нордена N_{m-1}. Назовем объект M_{ijk} тензором параллельности. Таким образом, если компоненты объекта кривизны групповой связности удовлетворяют соотношениям $M_{ijk}=0$, то параллельное перенесение, задаваемое системой $\nabla\lambda_i=0$, является абсолютным в коаффинной связности.

И обратно, если параллельное перенесение нормали 2-го рода, задаваемое системой $\nabla\lambda_i=0$, абсолютное, то компоненты кривизны коаффинной связности удовлетворяет соотношениям $M_{ijk}=0$. Покажем это. Пусть указанное параллельное перенесение абсолютное, тогда ковариантные производные $\nabla_j\lambda_i$ обращаются в нуль. Дифференциальные уравнения (6) принимают вид:

$$d\lambda_i - \lambda_j\varpi_i^j + \varpi_j = 0, \qquad (9)$$

Следовательно, объект λ_i является инвариантным относительно связности Г. Дифференцируя уравнения (9), получим

$$M_{ijk}\omega^j\wedge\omega^k=0,$$

или $M_{i[jk]}=0$, а в силу антисимметричности объекта M_{ijk} следует, что $M_{ijk}=0$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Чтобы параллельное перенесение нормали 2-го рода в коаффинной связности, заданное системой* $\nabla\lambda_i=0$, *являлось абсолютным необходимо и достаточно обращение в нуль тензора параллельности* M_{ijk}.

K.V. Polyakova

PARALLELISM TENSOR AND ABSOLUTE PARALLEL DISPLACEMENTS

Many dimensional surface in the projective space is considered as tangent planes manifold. Norden's normalization of the 2-nd kind is made. Covariant differential and covariant derivatives are obtained by means of bringing in differential equation for normalizing quasitensor components the coaffine connection form. The expession of exterior differential for covariant differential is found. Linear combinations for components of coaffine curvature object, turning up under the exterior products of base forms in the obtained expression, are tensor, called parallelism tensor. It is proved, the normal of the 2-nd kind parallel displacements are absolute if and only if parallelism tensor vanishes.

УДК 514.75

А.В. Скрягина

(Калининградский государственный университет)

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ В ПУЧКАХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ПЛОСКОСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В проективном пространстве рассмотрена плоскостная поверхность как многообразие плоских образующих и произведено оснащение Бортолотти. Оснащение Бортолотти индуцирует в ассоциированном расслоении пучки связностей 1-го и 2-го типов. Показано, что условием их совпадения является фиксация плоскости Бортолотти. Описаны параллельные перенесения в пучках связностей обоих типов, которые оказались свободно и связанно вырожденными.

Продолжим изучение плоскостной m- поверхности как r- мерного многообразия B_r [1] плоских h- мерных образующих L_h (r + h = m). Оснащающая плоскость Бортолотти P_{n-h-1}, дополняющая плоскость L_h до объемлющего пространства P_n, натянута на точки $B_\xi = A_\xi + \lambda^a_\xi A_a + \lambda_\xi A$ $(a, b = \overline{1, h};\quad \xi, \eta = \overline{h+1, n})$, причем коэффициенты $\lambda^a_\xi, \lambda_\xi$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям $(i, j, k = \overline{h+1, h+r})$

$$\Delta\lambda^a_\xi + \lambda_\xi \omega^a + \omega^a_\xi = \lambda^a_{\xi i}\omega^i,\ \Delta\lambda_\xi + \lambda^a_\xi \omega_a + \omega_\xi = \lambda_{\xi i}\omega^i. \tag{1}$$

Компоненты ковариантного дифференциала и ковариантных производных оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda^a_\xi, \lambda_\xi\}$ выражаются соответственно по формулам [1]:

(2)

$$\begin{cases} \nabla_i \lambda^a_\xi = \lambda^a_{\xi i} + \lambda^a_\eta \Gamma^\eta_{\xi i} - \lambda^b_\xi \Gamma^a_{bi} - \lambda_\xi \Gamma^a_i - \Gamma^a_{\xi i}, \\ \nabla_i \lambda_\xi = \lambda_{\xi i} + \lambda_\eta \Gamma^\eta_{\xi i} - \lambda^a_\xi \Gamma_{ai} - \Gamma_{\xi i}, \end{cases} \tag{3}$$

где формы групповой связности имеют вид: $\tilde{\omega} = \omega - \Gamma_i \omega^i$. Продолжая уравнения (1), найдем дифференциальные сравнения на пфаффовы производные компонент оснащающего квазитензора λ $(\alpha, \beta, \gamma = \overline{h+r+1, n})$

$$\Delta\lambda^a_{i(j)} - \lambda^a_\xi \omega^\xi_{ij} + \lambda^b_i \omega^a_{bj} - \lambda^a_{\alpha j}\omega^\alpha_i + \lambda_{ij}\omega^a + \lambda_i \theta^a_j \equiv 0,$$

$$\Delta\lambda^a_{\alpha(i)} - \lambda^a_{ji}\omega^j_\alpha + \lambda^b_\alpha \omega^a_{bi} - \lambda^a_\xi \omega^\xi_{\alpha i} + \lambda_{\alpha i}\omega^a + \lambda_\alpha \theta^a_i \equiv 0,$$

$$\Delta\lambda_{i(j)} - \lambda_{\alpha j}\omega_i^\alpha + \lambda_{ji}^a\omega_a - \lambda_\xi\omega_{ij}^\xi + \lambda_i^a\omega_{aj} \equiv 0,$$
$$\Delta\lambda_{\alpha(i)} - \lambda_{ji}\omega_\alpha^j + \lambda_{\alpha i}^a\omega_a - \lambda_\xi\omega_{\alpha i}^\xi + \lambda_\alpha^a\omega_{ai} \equiv 0.$$

Воспользовавшись формулами (1),(3) и результатами [1], можно показать, что

$$\Delta\nabla_{(i)}\lambda_\alpha^a + \nabla_i\lambda_\alpha\omega^a - \nabla_i\lambda_j^a\omega_\alpha^j \equiv 0,\ \Delta\nabla_{(j)}\lambda_i^a - \nabla_j\lambda_\alpha^a\omega_i^\alpha + \nabla_j\lambda_i\omega^a \equiv 0,$$
$$\Delta\nabla_{(i)}\lambda_\alpha + \nabla_i\lambda_\alpha^a\omega_a - \nabla_i\lambda_j\omega_\alpha^j \equiv 0,\ \Delta\nabla_{(j)}\lambda_i + \nabla_j\lambda_i^a\omega_a - \nabla_j\lambda_\alpha\omega_i^\alpha \equiv 0,$$

т.е. ковариантные производные $\nabla_i\lambda_\xi^a, \nabla_i\lambda_\xi$ составляют псевдотензор [2,с.46].

Полагая $\nabla_i\lambda_\xi^a = 0, \nabla_i\lambda_\xi = 0$ в формулах (3), получим

$$\Gamma_{\xi i} = \lambda_{\xi i} + \lambda_\eta\Gamma_{\xi i}^\eta - \lambda_\xi^a\Gamma_{ai},\ \Gamma_{\xi i}^a = \lambda_{\xi i}^a + \lambda_\eta^a\Gamma_{\xi i}^\eta - \lambda_\xi^b\Gamma_{bi}^a - \lambda_\xi\Gamma_i^a. \tag{5}$$

Определение 1. Пучком связностей 2-го типа назовем множество групповых связностей, определяемых объектом Г, компоненты которого удовлетворяют соотношениям (5).

Компоненты подобъекта $\Gamma_1 = \{\Gamma_0, \Gamma_{ij}^\alpha, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{ij}^k, \Gamma_{\alpha j}^i\}$ являются параметрами пучка. Из формул (5) вытекает

Теорема 1. *Оснащение Бортолотти плоскостной поверхности B_r индуцирует в ассоциированном расслоении $G(B_r)$ $r[(n-h)^2+h(h+r)]$- параметрический пучок групповых связностей 2-го типа.*

В пучке групповых связностей 2-го типа можно выделить единственную связность. Параметры пучка определены в работе [1], а остальные компоненты объекта связности определяются соотношениями (5). Таким образом, связность 2-го типа определяется объектом

$$\overset{2}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}_i^a, \overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a, \overset{0}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{0}{\Gamma}{}_{jk}^i, \overset{0}{\Gamma}{}_{ij}^\alpha, \overset{0}{\Gamma}{}_{\alpha j}^i, \overset{0}{\Gamma}{}_{\beta i}^\alpha, \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}, \overset{2}{\Gamma}{}_{\alpha i}, \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^a, \overset{2}{\Gamma}{}_{\alpha i}^a\}.$$

Теорема 2. *Оснащение Бортолотти плоскостной поверхности индуцирует второй тип групповой связности с объектом* $\overset{2}{\Gamma}$.

Замечание 1. Охват $\overset{1}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}_i^a, \overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a, \overset{0}{\Gamma}{}_{ai}, \overset{0}{\Gamma}{}_{jk}^i, \overset{0}{\Gamma}{}_{ij}^\alpha, \overset{0}{\Gamma}{}_{\alpha j}^i, \overset{0}{\Gamma}{}_{\beta i}^\alpha, \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}, \overset{1}{\Gamma}{}_{\alpha i}, \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^a, \overset{1}{\Gamma}{}_{\alpha i}^a\}$ найден в работе [1].

Дифференциалы точек B_ξ, определяющих оснащающую плоскость P_{n-h-1}, можно записать в виде [1]:

$$\begin{aligned} dB_\xi &= \theta B_\xi + [\omega_\xi^i + (\lambda_\xi\delta_j^i + \lambda_\xi^a\Lambda_{aj}^i)\omega^j]B_i + [\omega_\xi^\alpha + (\lambda_\xi\Lambda_i^\alpha + \lambda_\xi^a\Lambda_{ai}^\alpha)\omega^i]B_\alpha + \\ &+ (\nabla\lambda_\xi^a + l_{\xi i}^a\omega^i)A_a + (\nabla\lambda_\xi + l_{\xi i}\omega^i)A, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$l_{\xi i} = \Gamma_{\xi i} - \lambda_\eta \Gamma^\eta_{\xi i} + \lambda^a_\xi \Gamma_{ai} - \lambda_i \lambda_\xi - \lambda_\xi \lambda_\alpha \Lambda^\alpha_i - \lambda^a_\xi \lambda_\eta \Lambda^\eta_{ai}. \qquad (7)$$

Обращение в нуль псевдотензора $l = \{l^a_{\xi i}, l_{\xi i}\}$ определяет принадлежность групповой связности Г пучку 1-го типа [1].

Теорема 3. *Если групповая связность Г не принадлежит пучку 1-го типа* $(l \neq 0)$, *то оснащающая плоскость* P_{n-h-1} *переносится параллельно относительно нее при любом смещении.*

Действительно, из формул (6) видно, что при $\nabla\lambda^a_\xi = 0, \nabla\lambda_\xi = 0$ специальных смещений плоскости P_{n-h-1} не выделяется, т.е. параллельное перенесение является свободно вырожденным.

Теорема 4. *В пучке групповых связностей 1-го типа (l=0) оснащающая плоскость* P_{n-h-1} *переносится параллельно лишь тогда, когда она неподвижна, т.е. параллельное перенесение является связанно вырожденным.*

В самом деле, формулы (6) в этом случае примут вид:

$$dB_\xi = \theta B_\xi + [\ldots]^i_\xi B_i + [\ldots]^\alpha_\xi B_\alpha + \nabla\lambda^a_\xi A_a + \nabla\lambda_\xi A,$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

Замечание 2. Групповая связность 1-го типа $\overset{1}{\Gamma}$ принадлежит пучку 1-го типа, поэтому результаты теорем 3, 4 справедливы и для связности 1-го типа.

Запишем дифференциалы точек B_ξ, учитывая охват (5) пучка 2-го типа,

$$dB_\xi = \theta B_\xi + [\omega^i_\xi + (\lambda_\xi \delta^i_j + \lambda^a_\xi \Lambda^i_{aj})\omega^j]B_i + [\omega^\alpha_\xi + (\lambda_\xi \Lambda^\alpha_i + \lambda^a_\xi \Lambda^\alpha_{ai})\omega^i]B_\alpha + \\ + (\nabla\lambda^a_\xi + t^a_{\xi i}\omega^i)A_a + (\nabla\lambda_\xi + t_{\xi i}\omega^i)A, \qquad (8)$$

где

$$t^a_{\xi i} = \lambda^a_{\xi i} - \lambda^a_i \lambda_\xi - \lambda^b_\xi \lambda^a_\eta \Lambda^\eta_{bi} - \lambda_\xi \lambda^a_\alpha \Lambda^\alpha_i, \; t_{\xi i} = \lambda_{\xi i} - \lambda_i \lambda_\xi - \lambda_\xi \lambda_\alpha \Lambda^\alpha_i - \lambda^a_\xi \lambda_\eta \Lambda^\eta_{ai}. \qquad (9)$$

Дифференцируя (9), получим сравнения

$$\Delta t^a_{i(j)} + t_{ij}\omega^a - t^a_{\alpha j}\omega^\alpha_i \equiv 0, \; \Delta t^a_{\alpha(i)} + t_{\alpha i}\omega^a - t^a_{ji}\omega^j_\alpha \equiv 0,$$

$$\Delta t_{i(j)} + t^a_{ij}\omega_a - t_{\alpha j}\omega^\alpha_i \equiv 0, \; \Delta t_{\alpha(i)} + t^a_{\alpha i}\omega_a - t_{ji}\omega^j_\alpha \equiv 0,$$

т.е. объект $t = \{t^a_{\xi i}, t_{\xi i}\}$ является псевдотензором.

Определение 2. Поле плоскостей Бортолотти назовем специальным оснащением плоскостной поверхности B_r, если псевдотензор t равен нулю, т.е.

$$t^a_{\xi i} = 0, \quad t_{\xi i} = 0. \tag{10}$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что параллельные перенесения плоскостей P_{n-h-1} общего $(t \neq 0)$ и специального $(t = 0)$ оснащений относительно пучка связностей 2-го типа будут, соответственно, свободно и связанно вырожденными.

Условия совпадения пучков 1-го и 2-го типов эквивалентны соотношениям (10). Действительно, если рассмотреть соотношения (5) и (7) с учетом обращения псевдотензора l в нуль, то можно видеть, что пучки 1-го и 2-го типов совпадают лишь при выполнении следующих равенств:

$$\lambda^a_{\xi i} = \lambda^a_i \lambda_\xi + \lambda^b_\xi \lambda^a_\eta \Lambda^\eta_{bi} + \lambda_\xi \lambda^a_\alpha \Lambda^\alpha_i, \ \lambda_{\xi i} = \lambda_i \lambda_\xi + \lambda_\xi \lambda_\alpha \Lambda^\alpha_i + \lambda^a_\xi \lambda_\eta \Lambda^\eta_{ai},$$

которые эквивалентны равенствам (10).

Теорема 5. *Пучки групповых связностей 1-го и 2-го типов совпадают лишь тогда, когда оснащение Бортолотти специальное, т.е. оснащающая плоскость P_{n-h-1} неподвижна.*

Доказательство. Осталось показать неподвижность плоскости P_{n-h-1} при условии (10). Дифференциалы точек B_ξ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} dB_\xi &= \theta B_\xi + [\omega^i_\xi + (\lambda_\xi \delta^i_j + \lambda^a_\xi \Lambda^i_{aj})\omega^j]B_i + \\ &+ [\omega^\alpha_\xi + (\lambda_\xi \Lambda^\alpha_i + \lambda^a_\xi \Lambda^\alpha_{ai})\omega^i]B_\alpha + t^a_{\xi i}\omega^i A_a + t_{\xi i}\omega^i A, \end{aligned} \tag{11}$$

откуда и следует утверждение о неподвижности оснащающей плоскости P_{n-h-1}.

Замечание 3. Формулы (10) и (11) совпадают, т.к. $\nabla\lambda^a_\xi = 0, \nabla\lambda_\xi = 0$.

Список литературы

1. *Скрягина А.В.* Пучок связностей 1-го типа, индуцируемый оснащением Бортолотти плоскостной поверхности // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2000. С.35-38.

2. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. 83 с.

A.V. Skrygina

DEGENERATE PARALLEL DISPLACEMENTS IN THE BUNCHES OF CONNECTIONS ON THE PLANE SURFACE

The plane surface as manifold of plane is considered in the projective space and Bortolotti's equipment is made. Bortolotti's equipment induces in associated bundle the bunches of connections of the 1-st and 2-nd types. It is shown, that fixing of Bortolotti's plane is their coinsidence conditions. Parallel displacements in the bunches of connections of both types are described. They are freely and connectly degenerate.

УДК 514.76

Л.В. Степанова, М.Б. Банару

(Военный университет ВПВО ВС РФ,
Смоленский гуманитарный университет)

О КВАЗИСАСАКИЕВЫХ И КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Найден критерий того, что на гиперповерхности специального эрмитова многообразия индуцируется квазисасакиева структура. Доказано, что не существует вполне омбилической и отличной от вполне геодезической гиперповерхности у 6-мерного специального эрмитова подмногообразия алгебры Кэли.

Понятие квазисасакиевой структуры было введено Блэром [1]. Квазисасакиевы структуры – одни из наиболее интересных объектов изучения контактной геометрии, поскольку они являются элегантным обобщением, с одной стороны, сасакиевых, с другой – косимплектических структур, изучению которых посвящено огромное количество публикаций, характеризующих эти структуры как с точки зрения дифференциальной геометрии, так и точки зрения математической физики. Не вдаваясь в подробности столь обширной тематики, особо выделим классические работы [2], [3], [4], [5]. Однако, несмотря на то, что квазисасакиевыми структурами занимались многие математики, до настоящего времени известно сравнительно небольшое число примеров квазисасакиевых структур, отличных от сасакиевых и косимплектических.

В настоящей статье изучены квазисасакиевы структуры, индуцированные на гиперповерхностях специальных эрмитовых многообразий. Найдено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого почти контактная метрическая структура на гиперповерхности специального эр-