ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР 1974
Вып. 4

М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В.

КОНГРУЭНЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В работе рассматриваются конгруэнции V невырожденных квадрик в трехмерном проективном пространстве P_3. В то время как дифференциальная геометрия конгруэнций коник разработана сравнительно глубоко (см. [2]), конгруэнции квадрик изучены еще недостаточно. Д. Ример [6] применил для изучения конгруэнций квадрик метод перенесения в точечное девятимерное пространство. Он построил канонические реперы конгруэнций различных типов квадрик, получил формулы типа Френе и дал интерпретацию инвариантов деривационных формул. В настоящей работе исследование конгруэнций квадрик осуществлено без перенесения в девятимерное проективное пространство. Показано, что квадрики огибают в общем случае восемь поверхностей, называемых фокальными. Построены и геометрически охарактеризованы канонические реперы, две или три вершины которых являются фокальными точками квадрики. Для каждой пары фокальных точек определена четверка точек, инцидентных одной прямой и образующих гармоническую четверку. Исследованы классы конгруэнций квадрик

со специальными свойствами ассоциированных образов, в том числе подкласс конгруэнций квадрик с тремя плоскими фокальными поверхностями.

§I. Фокальные точки квадрики, принадлежащей конгруэнции.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3, отнесенном к подвижному реперу $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ двупараметрическое семейство (конгруэнцию) V невырожденных поверхностей второго порядка (квадрик).

Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \tag{1.1}$$

причем формы пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{1.3}$$

Квадрика Q конгруэнции V определяется уравнением

$$F \equiv a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \tag{1.4}$$

причем

$$\det \| a_{\alpha\beta} \| = c \neq 0, \tag{1.5}$$

где C -произвольная отличная от нуля константа. Система пфаффовых уравнений конгруэнции V запишется в виде

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta i} \tau^i \quad (i, j, \kappa = 1, 2) \tag{1.6}$$

где τ^i -инвариантные формы параметрической группы [1] и

$$\nabla a_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta} \omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma} \omega^\gamma_\beta . \tag{1.7}$$

Из (I.5) вытекают тождества

$$a^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta i} = 0 , \tag{1.8}$$

где $a^{\alpha\beta}$ -приведенные алгебраические дополнения элемента $a_{\alpha\beta}$ матрицы $\| a_{\alpha\beta} \|$.

Рассмотрим квадратичные формы

$$F_i \equiv \lambda_{\alpha\beta i} x^\alpha x^\beta . \tag{1.9}$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, т.е. при $\tau^1 = \tau^2 = 0$. Так как

$$\delta F_i = \vartheta^j_i F_j , \tag{1.10}$$

где ϑ^j_i -некоторые формы Пфаффа, то линия

$$F_1 = 0 , \; F_2 = 0 \tag{1.11}$$

является инвариантной кривой четвертого порядка, называемой характеристическим многообразием ранга I конгруэнции V [2].

Точки квадрики (I.4), лежащие на (I.II), называются её фокальными точками [4]. Из (I.4), (I.II) следует, что квадрика конгруэнции V имеет в общем случае восемь фокальных точек. Поверхности, описываемые этими точками, называются фокальными поверхностями конгруэнции V.

Т е о р е м а I.I. Каждая фокальная поверхность является огибающей поверхностью квадрик конгруэнции V.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершину A_1 репера в произвольную фокальную точку квадрики (I.4), а вершины A_2 и A_3 расположим в касательной плоскости к этой квадрике в точке A_1. Тогда

$$a_{11} = 0 , \; a_{12} = 0 , \; a_{13} = 0 , \; a_{14} \neq 0 . \tag{1.12}$$

Из (I.6) находим

$$\omega^4_1 = -\frac{1}{2a_{14}} \left(\lambda_{111} \tau^1 + \lambda_{112} \tau^2 \right) . \tag{1.13}$$

Так как A_1 -фокальная точка, то её координаты удовлетворяют уравнениям (I.II). Имеем:

$$\lambda_{111} = 0 , \quad \lambda_{112} = 0 . \tag{1.14}$$

Подставляя (I.I4) в (I.I3), получим

$$\omega^4_1 = 0 .$$

Следовательно, плоскость $A_1 A_2 A_3$ является касательной плоскостью к фокальной поверхности (A_1). Теорема доказана.

§2. Канонические реперы конгруэнции V.

Исключая из рассмотрения случай, когда все фокальные поверхности конгруэнции V сливаются в одну или когда семь фокальных поверхностей вырождаются в линии, поместим вершины A_1 и A_2 репера в фокальные точки квадрики, описывающие невырожденные фокальные поверхности. Вершины A_3 и A_4 расположим на прямой, полярно сопряженной прямой A_1A_2 относительно квадрики (I.4) так, чтобы точки A_3 и A_4 были полярно сопряжены относительно квадрики. Имеем

$$a_{11} = a_{13} = a_{14} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0. \tag{2.1}$$

$$a_{44}\, a_{33}\, a_{12} \neq 0. \tag{2.2}$$

Нормировкой вершин репера и выбором константы C (см.(I.5)) приводим коэффициенты $a_{33} = a_{44} = 1$, $a_{12} = -1$. Уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции V запишется в виде

$$(x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \omega_i^j = 0, \ \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \ \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \ \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \\ \omega_3^4 + \omega_4^3 = a^k\omega_k, \ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 = \Gamma_i^{ik}\omega_k, \ \omega_3^3 = \Gamma_3^{3k}\omega_k. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$, по индексам i и j суммирование не производится и

$$\omega_i^4 = \omega_i. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\xi = \Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31} - \Gamma_1^{31}\Gamma_2^{32} + 1, \ \eta = \Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}. \tag{2.6}$$

Продолжая (2.4), находим:

$$\delta\xi = \xi\eta, \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} \delta\eta = (\eta^2 + 2\xi)\pi_3^4, \\ \delta(\Gamma_1^{32} - \Gamma_2^{31}) = (\Gamma_1^{32} + \Gamma_2^{31})[2\pi_1^1 + (\Gamma_1^{31} - \Gamma_2^{32})\pi_3^4]. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Из невырожденности поверхностей (A_i) следует, что

$$\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31} \neq 0. \tag{2.9}$$

Формула (2.7) показывает, что обращение ξ в нуль имеет инвариантный смысл. Исключая из рассмотрения такие конгруэнции, фиксируем оставшиеся вторичные параметры так, чтобы

$$\eta = 0, \quad \Gamma_1^{32} - \Gamma_2^{31} = 0. \tag{2.10}$$

Положим

$$\alpha = \Gamma_1^{31}, \quad \beta = \Gamma_2^{32}. \tag{2.11}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции V принимает вид:

$$\begin{gathered} \omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (-1)^i\beta\omega_i + \alpha\omega_j, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \\ \omega_i^i = \Gamma_i^{ik}\omega_k, \quad \omega_3^3 = \Gamma_3^{3k}\omega_k, \end{gathered} \tag{2.12}$$

причем

$$\alpha \neq 0. \tag{2.13}$$

Построенный репер назовем каноническим репером первого рода конгруэнции V. Если же фиксация (2.10) оставшихся двух вторичных параметров не осуществлена, то такой репер назовем частично канонизированным репером первого рода

Исследование некоторых классов конгруэнций квадрик с тремя и более различными фокальными поверхностями целесообразно осуществлять в репере, вершины A_1, A_2, A_3 которого являются фокальными точками квадрики, а вершина A_4 – полюсом плоскости $A_1A_2A_3$ относительно квадрики.

Нормировка вершин репера осуществляется так, что

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1\,, \quad a_{44} = -\frac{1}{2}\,. \tag{2.14}$$

Такой репер называется каноническим репером второго рода конгруэнции V. Уравнение квадрики и система пфаффовых уравнений конгруэнции V относительно такого репера имеют соответственно вид:

$$x^1x^2 + x^2x^3 + x^1x^3 - \frac{1}{2}(x^4)^2 = 0, \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered} \omega_1^2 = \gamma_1^{2k}\omega_k\,, \quad \omega_2^3 = \gamma_2^{3k}\omega_k\,, \quad \omega_3^1 = \gamma_3^{1k}\omega_k\,, \\ \omega_4^i = \gamma^{ik}\omega_k\,, \quad \omega_3^4 = \gamma_3^{4k}\omega_k\,, \quad \omega_4^3 = \gamma_4^{3k}\omega_k\,, \\ \omega_i^i = \gamma_i^{ik}\omega_k\,, \quad \omega_3^3 = \gamma_3^{3k}\omega_k\,, \\ \omega_1^2 + \omega_1^3 = 0\,; \quad \omega_2^1 + \omega_2^3 = 0\,; \quad \omega_3^1 + \omega_3^2 = 0 \end{gathered} \tag{2.16}$$

§3. Ассоциированные φ-точки.

Рассмотрим на ребре $\ell \equiv A_3A_4$ частично канонизированного репера I-го рода некоторую инвариантную точку

$$N = A_3 + \lambda A_4\,, \tag{3.1}$$

не лежащую на квадрике (2.3), т.е.

$$\lambda^2 + 1 \neq 0\,. \tag{3.2}$$

Из инвариантности точки N следует:

$$\delta\lambda = \lambda^2\pi_4^3 - \pi_3^4\,. \tag{3.3}$$

Линия

$$\theta_i \equiv (1 - \lambda\Gamma_i^{3i})\,\omega_i - \lambda\Gamma_i^{3j}\omega_j = 0 \tag{3.4}$$

на поверхности (A_i) характеризуется тем, что касательная к ней проходит через точку N.

Точка

$$M_i = (\Gamma_i^{3i} + \Gamma_i^{3j}\nu_j)\,A_3 + A_4\,, \tag{3.5}$$

где

$$\nu_j = \frac{\lambda\Gamma_j^{3i}}{1 - \lambda\Gamma_j^{3j}}\,, \tag{3.6}$$

является точкой пересечения с прямой ℓ касательной к линии $\theta_j = 0$ на поверхности (A_i).

Точка N^*, полярно сопряженная точке N относительно квадрики Q, определяется формулой

$$N^* = -\lambda A_3 + A_4\,. \tag{3.7}$$

Потребуем, чтобы точки M_1 и M_2 гармонически делили точки N, N^*, т.е.

$$(M_1M_2\,; NN^*) = -1\,. \tag{3.8}$$

Имеем:

$$M_i = (\Gamma_i^{3i} + \nu_j \Gamma_i^{3j} + \lambda) N + [1 - \lambda(\Gamma_i^{3i} + \nu_j \Gamma_i^{3j})] N^*. \quad (3.9)$$

Условие (3.8) приводится к уравнению четвертой степени относительно λ :

$$\varphi_a(\lambda)\ \varphi_c(\lambda) = 0, \quad (3.10)$$

где

$$\varphi_a(\lambda) = \lambda^2 \eta - 2\lambda\xi - \eta, \quad (3.11)$$

$$\varphi_c(\lambda) = \lambda^2 (\Gamma_1^{31}\Gamma_2^{32} - \Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31}) - \lambda\eta + 1. \quad (3.12)$$

Точки (3.I), определяемые уравнениями $\varphi_a(\lambda)=0$, $\varphi_c(\lambda)=0$, назовем соответственно φ_a-точками и φ_c-точками.

Фиксация (2.I0) обозначает, что точки A_3 и A_4 совмещаются с φ_a-точками.

Т е о р е м а 3.I. φ_c-точки гармонически делят φ_a-точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем конгруэнцию V к каноническому реперу первого рода. Тогда уравнение (3.I2) запишется в виде:

$$(\alpha^2 + \beta^2)\lambda^2 - 1 = 0. \quad (3.13)$$

Так как A_3 и A_4 являются φ_a-точками, то из (3.I3) непосредственно следует утверждение теоремы.

§4. Геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией квадрик.

Отнесем конгруэнцию V к каноническому реперу первого рода и рассмотрим некоторые геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией V .

I. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2), (A_3A_4), (A_iA_3), (A_iA_4) ребер репера.

Фокусы

$$F = \lambda\mathcal{P} + \mu Q \quad (4.1)$$

луча, где $\mathcal{P}$ и Q соответствующие вершины репера, и торсы этих прямолинейных конгруэнций определяются соответственно уравнениями:

(A_1A_2)

$$\lambda^2\Gamma_1^{32} - 2\lambda\mu\Gamma_1^{31} - \mu^2\Gamma_2^{31} = 0, \quad (4.2)$$

$$\Gamma_2^{31}(\omega_1)^2 - 2\Gamma_1^{31}\omega_1\omega_2 - \Gamma_1^{32}(\omega_2)^2 = 0, \quad (4.3)$$

(A_3A_4)

$$(4.4) \quad (\lambda\Gamma_3^{11} + \mu\Gamma_4^{11})(\lambda\Gamma_3^{22} + \mu\Gamma_4^{22}) - (\lambda\Gamma_3^{12} + \mu\Gamma_4^{12})(\lambda\Gamma_3^{21} + \mu\Gamma_4^{21}) = 0.$$

$$(\Gamma_3^{11}\omega_1 + \Gamma_3^{12}\omega_2)(\Gamma_4^{21}\omega_1 + \Gamma_4^{22}\omega_2) -$$
$$- (\Gamma_3^{21}\omega_1 + \Gamma_3^{22}\omega_2)(\Gamma_4^{11}\omega_1 + \Gamma_4^{12}\omega_2) = 0, \quad (4.5)$$

(A_iA_3)

$$\mu[\mu(\Gamma_3^{ji}\Gamma_3^{4j}-\Gamma_3^{jj}\Gamma_3^{4i})-\lambda\Gamma_3^{jj}]=0, \qquad (4.6)$$

$$\omega_i(\Gamma_3^{ji}\omega_i+\Gamma_3^{jj}\omega_j)=0, \qquad (4.7)$$

(A_iA_4)

$$\mu^2(\Gamma_4^{3j}\Gamma_4^{ji}-\Gamma_4^{jj}\Gamma_4^{3i})+\lambda\mu(\Gamma_i^{3j}\Gamma_4^{ji}-\Gamma_4^{jj}\Gamma_i^{3i})=0, \qquad (4.8)$$

$$(\Gamma_4^{jj}\omega_j+\Gamma^{ji}\omega_i)(\Gamma_i^{3j}\omega_j+\Gamma_i^{3i}\omega_i)=0 \qquad (4.9)$$

2. Касательные плоскости к поверхностям (A_3) и (A_4). Они определяются соответственно точками A_3, N_1, N_2 и A_4, K_1, K_2, где

$$N_i=\Gamma_3^{\alpha i}A_\alpha,\quad K_i=\Gamma_4^{\alpha i}A_\alpha \qquad (4.10)$$

3. Характеристические точки H_3 и H_4 граней $(A_1A_2A_4)$ и $(A_1A_2A_3)$.

Имеем

$$H_3=m^kA_k+A_4,\quad H_4=A_3-\Gamma_3^{4k}A_k, \qquad (4.11)$$

где

$$(\Gamma_i^{3i}\Gamma_j^{3j}-\Gamma_i^{3j}\Gamma_j^{3i})m^i=\Gamma_j^{3i}\Gamma_4^{3j}-\Gamma_j^{3j}\Gamma_4^{3i}. \qquad (4.12)$$

4. Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнций коник C_1, C_2:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0, \qquad (4.13)$$

$$(x^4)^2-2x^1x^2=0,\quad x^3=0. \qquad (4.14)$$

Они определяются соответственно системами уравнений:

$$(\omega_1^1+\omega_2^2)x^1x^2+(-\omega_1^3+\omega_3^2)x^1x^3+(-\omega_2^3+\omega_3^1)x^2x^3+\omega_3^3(x^3)^2=0,$$
$$x^3\omega_3^4+x^k\omega_k=0,\quad (x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0 \qquad (4.15)$$

$$(\omega_1^1+\omega_2^2)x^1x^2+(-\omega_1+\omega_4^2)x^1x^4+(-\omega_2+\omega_4^1)x^2x^4+\omega_4^4(x^4)^2=0$$
$$x^k\omega_k^3+x^4\omega_4^3=0,\quad (x^4)^2-2x^1x^2=0,\quad x^3=0. \qquad (4.16)$$

§5. Конгруэнции K.

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией K называется конгруэнция V, обладающая следующими свойствами:

1) индуцированная пара (C_1, C_2) конгруэнций коник C_1 и C_2 является расслояемой [3],

2) вершины A_3 и A_4 канонического репера первого рода являются характеристическими точками соответственно плоскостей $x^4=0$ и $x^3=0$,

3) поверхность (A_3) или поверхность (A_4) не вырождается в линию.

Т е о р е м а 5.1. Существует только два непересекающихся класса конгруэнций K, каждый из которых определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя условия определения конгруэнции K, убеждаемся, что в каноническом репере первого рода выполняются уравнения (см. [3], стр. 211-212)

$$\omega_3^4 = 0,\ \omega_4^3 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_4^4 = 0, \tag{5.1}$$

$$\omega_i \wedge \omega_4^j + \omega_i^3 \wedge \omega_3^j = 0,$$

$$\omega_3^k \wedge \omega_k = 0,\ \omega_4^k \wedge \omega_k = 0,$$

$$\omega_3^k \wedge \omega_k^3 = 0,\ \omega_4^k \wedge \omega_k^3 = 0, \tag{5.2}$$

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 = 0,$$

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

причем

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0. \tag{5.3}$$

Учитывая (2.12), заменяем квадратичные уравнения (5.2) конечными:

$$\Gamma_4^{ii} = \alpha b + (-1)^i \beta \Gamma_3^{ii}, \tag{5.4}$$

$$\Gamma_3^{21} = b, \qquad \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21}, \tag{5.5}$$

$$\alpha(\Gamma_3^{11} - \Gamma_3^{22}) + 2\beta b = 0, \tag{5.6}$$

$$\alpha(\Gamma_4^{11} - \Gamma_4^{22}) + 2\beta \Gamma_4^{12} = 0, \tag{5.7}$$

$$m + \Gamma_4^{12}\Gamma_4^{21} - \Gamma_4^{11}\Gamma_4^{22} = 0, \tag{5.8}$$

$$\Gamma_4^{12} = \alpha \Gamma_3^{11} - m, \tag{5.9}$$

где

$$b = \Gamma_3^{12},\ m = \Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - b^2. \tag{5.10}$$

В силу условия 3 определения I

$$m \neq 0. \tag{5.11}$$

Подставляя в (5.7) значения Γ_4^{ik} из (5.4),(5.5),(5.9) и учитывая (5.11), получим:

$$\beta = 0. \tag{5.12}$$

Уравнения (5.4)-(5.9) приводятся к виду

$$\beta = 0,\ \Gamma_3^{11} = \Gamma_3^{22},\ \Gamma_4^{ii} = \alpha b,\ \Gamma_3^{21} = b,\ \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21},$$

$$m + \Gamma_4^{12}\Gamma_4^{21} - \Gamma_4^{11}\Gamma_4^{22} = 0,\ \ \Gamma_4^{12} = \alpha\Gamma_3^{11} - m. \tag{5.13}$$

Обозначим:

$$\Gamma_3^{11} = a,\ \ \Gamma_1^{1i} = \rho^i. \tag{5.14}$$

Система уравнений (2.12),(5.1) приводится к виду:

$$\omega_i^j = 0,\ \omega_3^4 = 0,\ \omega_4^3 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_4^4 = 0,\ \omega_1^1 = \rho^k \omega_k, \tag{5.15}$$

$$\omega_3^i = a\omega_i + b\omega_j, \tag{5.16}$$

$$\omega_i^3 = \alpha\omega_j,\quad \omega_4^i = \alpha\omega_3^j - m\omega_j, \tag{5.17}$$

причем

$$\alpha^2 + m - 2a\alpha + 1 = 0 \tag{5.18}$$

Продолжая (5.17), находим

$$d\alpha = 2\alpha\Omega,\ dm = 4\alpha a\Omega, \tag{5.19}$$

где

$$\Omega = p^1\omega_1 - p^2\omega_2 . \qquad (5.20)$$

Дифференцируя (5.18) с учетом (5.19), получим

$$da = 2\alpha\Omega \qquad (5.21)$$

Так как

$$m = a^2 - b^2 , \qquad (5.22)$$

то из (5.19),(5.21) находим

$$db = 0 \qquad (5.23)$$

Продолжая (5.16) с учетом (5.21),(5.23), находим

$$p^1(\alpha - a) = 0 , \quad p^2(\alpha - a) = 0 . \qquad (5.24)$$

Равенства (5.24) выделяют только два случая:

$$a = \alpha , \qquad (5.25)$$

$$p^1 = p^2 = 0 , \quad a - \alpha \neq 0 . \qquad (5.26)$$

Случай (5.26) приводит к противоречию. Действительно, замыкая уравнение

$$\omega_1^1 = 0 , \qquad (5.27)$$

получим

$$\alpha a = 0 , \qquad (5.28)$$

это противоречит неравенствам (2.13),(5.11). Рассмотрим

случай (5.25). Из (5.18) находим:

$$b = \varepsilon , \quad \varepsilon^2 = 1 . \qquad (5.29)$$

Следовательно, конгруэнции K разбиваются на два непересекающихся класса: конгруэнции K_1 (когда $b = 1$) и конгруэнции K_{-1} (когда $b = -1$). Замкнутая система уравнений, определяющая конгруэнции K_ε, имеет вид:

$$\omega_i^j = 0 , \quad \omega_3^4 = 0 , \quad \omega_4^3 = 0 , \quad \omega_3^3 = 0 , \quad \omega_4^4 = 0 ,$$

$$\omega_i^1 = p^k\omega_k , \quad \omega_i^3 = a\omega_j , \quad \omega_3^i = a\omega_i + \varepsilon\omega_j , \qquad (5.30)$$

$$\omega_4^i = \varepsilon\omega_3^i , \quad da = 2a\Omega .$$

$$dp^1\wedge\omega_1 + dp^2\wedge\omega_2 + (a^2 - 2p^1p^2 - 1)\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0,$$
$$dp^1\wedge\omega_1 - dp^2\wedge\omega_2 = 0 \qquad (5.31)$$

Следовательно,

$$S_1 = 2 , \quad q = 2 , \quad S_2 = 0 , \quad Q = N = 2 .$$

Система (5.30),(5.31) — в инволюции и определяет конгруэнции K_ε с произволом двух функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5.2. Конгруэнции K_ε обладают следующими геометрическими свойствами:

1) Фокусы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1, A_2.

2) Прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) вырождается в связку

прямых с центром в точке

$$\mathfrak{I}_\varepsilon = A_3 - \varepsilon A_4 , \qquad (5.32)$$

3)Двойные точки Ермолаева [5]

$$T_1 = aA_3 - A_4 , \quad T_2 = aA_3 + A_4 \qquad (5.33)$$

поверхностей $(A_1),(A_2)$ являются φ_a-точками.

4) Характеристическое многообразие (I.II) является четверкой прямых

$$\mathcal{L}_1 \equiv A_1A_2 , \mathcal{L}_2 \equiv A_3A_4 , \mathcal{L}_3 \equiv P_1T_1 , \mathcal{L}_4 \equiv P_2T_2 , \qquad (5.34)$$

где точки

$$P_1 = A_1 + A_2 , \quad P_2 = A_1 - A_2 \qquad (5.35)$$

-фокусы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

5)Все коники конгруэнций $(C_1),(C_2)$ принадлежат конусу

$$\Phi \equiv (x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 + 2\varepsilon x^3x^4 = 0 \qquad (5.36)$$

с вершиной в точке $\mathfrak{I}_\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1)Фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) есть точки A_1+A_2 и $A_1 - A_2$. 2) $d\mathfrak{I}_\varepsilon = 0$. 3)Имеем

$$(dA_1)_{\omega_1+\omega_2=0} = \omega_1^1 A_1 + \omega_2 T_1 ,$$
$$(dA_2)_{\omega_1+\omega_2=0} = \omega_2^2 A_2 + \omega_1 T_1 , \qquad (5.37)$$

$$(dA_1)_{\omega_1-\omega_2=0} = \omega_1^1 A_1 + \omega_2 T_2 ,$$
$$(dA_2)_{\omega_1-\omega_2=0} = \omega_2^2 A_2 + \omega_1 T_2 \qquad (5.37)$$

4) Уравнения (I.II) приводятся к виду

$$x^1x^3 + ax^2x^4 = 0 , \; x^2x^3 + ax^1x^4 = 0 , \qquad (5.38)$$

откуда непосредственно видно, что линия (5.38) распадается на прямые $\mathcal{L}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3,4)$.

5)Утверждение непосредственно следует из сравнения формул (4.13),(4.14),(5.36).

§6. Конгруэнции $\mathcal{L}$.

Отнесем конгруэнцию V к каноническому реперу второго рода. Назовем фокальную поверхность конгруэнции V плоской, если она является плоскостью или вырождается в плоскую линию.

О п р е д е л е н и е 3. Конгруэнцией $\mathcal{L}$ называется конгруэнция V, обладающая следующими свойствами:

1)Фокальные поверхности $(A_1),(A_2),(A_3)$ являются плоскими,

2)прямые A_1A_3 и A_2A_3 являются компонентами характеристического многообразия ранга один (многообразия (I.II)).

Т е о р е м а 6.1.Конгруэнции $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как поверхности

$(A_1),(A_2),(A_3)$ плоские, то

$$
\begin{gathered}
\omega_4^i = 0, \quad \omega_4^3 = 0, \\
\omega_3^1 - \omega_1^3 - \omega_1^1 + \omega_3^3 = 0, \\
\omega_1^2 - \omega_2^1 - \omega_2^2 + \omega_1^1 = 0, \\
\omega_2^3 - \omega_3^2 - \omega_3^3 + \omega_2^2 = 0.
\end{gathered} \tag{6.1}
$$

Уравнения (I.II) в силу (2.I6), (6.I) приводятся к виду:

$$
\begin{gathered}
2(\gamma_3^{31} x^1 x^2 + \gamma_2^{21} x^1 x^3 + \gamma_1^{11} x^2 x^3) - x^1 x^4 - \gamma_3^{41} x^3 x^4 + (\gamma_3^{31} + \gamma_2^{21} + \gamma_1^{11})(x^4)^2 = 0, \\
2(\gamma_3^{32} x^1 x^2 + \gamma_2^{22} x^1 x^3 + \gamma_1^{12} x^2 x^3) - x^2 x^4 - \gamma_3^{42} x^3 x^4 + (\gamma_3^{32} + \gamma_2^{22} + \gamma_1^{12})(x^4)^2 = 0.
\end{gathered} \tag{6.2}
$$

Так как прямые $A_i A_3$ принадлежат характеристическому многообразию (6.2), то

$$
\gamma_2^{2i} = 0, \quad \gamma_1^{1i} = 0 \tag{6.3}
$$

Замкнутая система уравнений, определяющая конгруэнции $\mathcal{L}$, приводится к виду:

$$
\begin{gathered}
\omega_1^2 = \gamma_1^{2k} \omega_k, \quad \omega_3^4 = \gamma_3^{4k} \omega_k, \quad \omega_4^i = 0, \quad \omega_4^3 = 0, \\
\omega_1^2 + \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 + \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \\
\omega_1^2 + \omega_3^3 = 0, \quad \omega_1^2 - \omega_2^1 = 0, \quad \omega_1^1 = 0, \quad \omega_2^2 = 0,
\end{gathered} \tag{6.4}
$$

$$
\begin{gathered}
d\gamma_1^{2k} \wedge \omega_k + h\, \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\
d\gamma_3^{4k} \wedge \omega_k + k\, \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,
\end{gathered} \tag{6.5}
$$

где

$$
\begin{gathered}
h = \gamma_1^{21} \gamma_1^{22} (\gamma_3^{41} - \gamma_3^{42}) + (\gamma_1^{21})^2 (1 - \gamma_3^{42}) + (\gamma_1^{22})^2 (\gamma_3^{41} - 1), \\
k = (\gamma_1^{22} - \gamma_1^{21}) \gamma_3^{41} \gamma_3^{42} + \gamma_1^{21} (\gamma_3^{41} - \gamma_3^{42}) + \gamma_1^{22} (\gamma_3^{41})^2 - \gamma_1^{21} (\gamma_3^{42})^2.
\end{gathered} \tag{6.6}
$$

Имеем

$$
S_1 = 2, \ q = 4, \ S_2 = 2, \ N = Q = 6.
$$

Система (6.4), (6.5) – в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{L}$ с произволом двух функций двух аргументов.

Обозначим:

$$
\ell = A_1 A_2, \quad \ell_2 = A_1 A_3, \quad \ell_3 = A_2 A_3. \tag{6.7}
$$

$$
P_1 = \gamma_1^{2k} A_k, \quad P_2 = \rho A_1 + \gamma_1^{22} A_3, \quad P_3 = \rho A_2 - \gamma_1^{21} A_3, \tag{6.8}
$$

где

$$
\rho = \gamma_1^{21} \gamma_3^{42} - \gamma_1^{22} \gamma_3^{41}. \tag{6.9}
$$

Геометрически точки (6.8) характеризуются тем, что поверхность (P_a) $(a=1,2,3)$ является фокальной поверхностью прямолинейной конгруэнции (ℓ_a).

Т е о р е м а 6.2. Конгруэнции $\mathcal{L}$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1) точки P_1, P_2, P_3 инцидентны одной прямой, 2) прямая $A_3 A_4$ является неподвижной, 3) точки A_a $(a=1,2,3)$ являются фокальными точками коники C_4:

$$
x^1 x^2 + x^2 x^3 + x^1 x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{6.10}
$$

причем точка A_3 -сдвоенная фокальная точка.

Доказательство. Имеем:

$$1)\ \rho P_1-\gamma_1^{21}P_2-\gamma_1^{22}P_3=0,\quad 2)\ d[A_3A_4]=0. \tag{6.11}$$

3) Фокальные точки коники C_4 определяются уравнением (6.10) и уравнением

$$x^1x^2(x^1\gamma_1^{22}-x^2\gamma_1^{21}-\rho x^3)=0. \tag{6.12}$$

Литература

1. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. "Геометрия", 1963 (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР), М., 1965, 5-64.
2. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия, 10, М., 1972, 113-158.
3. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Тр. геом. семинара ВИНИТИ АН СССР. М., 1971, 3, 193-220.
4. Махоркин В.В., Некоторые типы многообразий гиперквадрик. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 3, Калининград, 1973, 50-59.
5. Фиников С.П., Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева. Уч. записки МГПИ, 16, вып. 3, 1951, 235-260.
6. Rimez D. Congruences de quadriques en P_3 et A_3. „Math. Nachr.", 1972, 53, №1-6, 345-359.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Новожилова Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(CL)_{1,2}$.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ пар фигур C и L, где C -эллипс, L -прямая, не инцидентная плоскости эллипса [1]. Исследованы торсовые конгруэнции $(CL)_{1,2}$. Выделены конгруэнции с осевой и центральной аффинной симметрией.

§1. Канонический репер конгруэнции $(CL)_{1,2}$.

Канонический репер $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ конгруэнции $(CL)_{1,2}$ строится следующим образом: начало A репера R помещается в точку пересечения прямой L с плоскостью соответствующего ей эллипса C, $\bar e_3=\overline{AM}$, где M -центр эллипса, конец N вектора $\bar e_2$ выбирается так, что $\overline{AN}=\overline{MP}$, где $\overline{MP}$ -вектор, сопряженный вектору $\overline{AM}$, и точка P инцидентна эллипсу C, вектор $\bar e_1$ направляется по прямой L.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar A=\omega^i\bar e_i,\quad d\bar e_i=\omega_i^j\bar e_j,\quad (i,j,k=1,2,3), \tag{1}$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,\quad D\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j \tag{2}$$