ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

С.В.К и р е е в а

О ПАРЕ СЕТЕЙ

В данной работе рассматривается отображение f области Ω проективного пространства P_n в область $\overline{\Omega}\subset P_n$, переводящее точку A в точку B. Области Ω и $\overline{\Omega}$ нормализованы в смысле А.П.Нордена одним и тем же семейством плоскостей: $A\to\Pi_{n-1}(A)$, $B\to\Pi_{n-1}(A)$. Изучаются объекты отображения f и его характеристические направления.

п.1. Пусть в проективном пространстве P_n заданы две диффеоморфные области $\Omega,\overline{\Omega}$ $(\Omega\cap\overline{\Omega}=\varnothing)$. Диффеоморфизм $f:\Omega\to\overline{\Omega}$ переводит точку $A\in\Omega$ в точку $B\in\overline{\Omega}$ $(B\neq A)$. Область Ω нормализована в смысле А.П.Нордена некоторым семейством гиперплоскостей $\Pi_{n-1}(A)$: $A\to\Pi_{n-1}(A)$. Область $\overline{\Omega}$ нормализована тем же семейством гиперплоскостей: $B\to\Pi_{n-1}(B)=\Pi_{n-1}(A)$.

Пусть в области Ω задана сеть Σ_n. Отображение f переводит сеть Σ_n в сеть $\overline{\Sigma}_n\subset\overline{\Omega}$. К областям $\Omega,\overline{\Omega}$ присоединим подвижные реперы $\mathcal{R}^A=\{A,A_i\}$; $\mathcal{R}^B=\{B,B_i\}$, где A_i, B_i -нормальные точки [6] касательных к линиям $\omega^i,\overline{\omega}^i$ сетей $\Sigma_n,\overline{\Sigma}_n$. Точки B, B_i в репере $\mathcal{R}^A$ имеют следующие представления:

$$\vec{B}=\vec{A}+\gamma^i\vec{A}_i,\quad \vec{B}_i=\gamma^j_i\vec{A}_j \tag{1}$$

Во всей работе индексы i,j,k,ℓ,m пробегают значения $1,2\ldots,n$, а индексы $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$ значения $0,1,2,\ldots,n$. Запишем деривационные формулы реперов $\mathcal{R}^A: d\vec{A}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\vec{A}_\beta$ и $\mathcal{R}^B: d\vec{B}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\vec{B}_\beta$,

где формы ω^β_α, $\overline{\omega}^\beta_\alpha$ удовлетворяют известным уравнениям структуры проективного пространства P_n.

Известно [3], что отображение f может быть задано следующими дифференциальными уравнениями:

$$\overline{\omega}^i=\omega^i. \tag{2}$$

Уравнения

$$d\gamma^i-\gamma^i\omega^0_0-\gamma^i\gamma^j\omega^0_j+\omega^i+\gamma^j\omega^i_j=\gamma^i_j\,\omega^j \tag{3}$$

получены путем дифференцирования тождеств (1). Они определяют дифференциалы $d\gamma^i$ в репере $\mathcal{R}^A$.

При продолжении уравнений (3) получим:

$$d\gamma^i_j-\gamma^i_k\omega^k_j+\gamma^k_j\omega^i_k-(\gamma^k\gamma^i_j+\gamma^i\gamma^k_j)\omega^0_k=\gamma^i_{jm}\omega^m,\quad \gamma^i_{jm}=\gamma^i_{mj}. \tag{4}$$

Если продолжим теперь систему уравнений (4), то будем иметь:

$$d\gamma^i_{jm}+\gamma^i_{jm}\omega^0_0-\gamma^i_{j\ell}\omega^\ell_m+\gamma^k_{jm}\omega^i_k-\gamma^i_{km}\omega^k_j+\gamma^i_m\omega^0_j+$$
$$+\gamma^i_j\omega^0_m-(\gamma^i_m\gamma^k_j+\gamma^k_m\gamma^i_j+\gamma^k_{jm}\gamma^i+\gamma^i_{jm}\gamma^k)\omega^0_k=\gamma^i_{jmp}\,\omega^p, \tag{5}$$

где γ^i_{jmp} -симметричны по всем нижним индексам.

Область $\Omega\subset P_n$ нормализована семейством гиперплоскостей $\Pi_{n-1}(A)$, и в ней задана сеть Σ_n, поэтому формы ω^j_i $(i\neq j)$, ω^0_i -главные [1],[2]:

$$\omega^j_i=a^j_{ik}\,\omega^k,\ (i\neq j);\quad \omega^0_i=a^0_{ik}\,\omega^k. \tag{6}$$

Обозначим через π^β_α значение форм ω^β_α при закрепленных первичных параметрах: $\omega^i=0$. В нашем случае: $\pi^j_i=0$ $(i\neq j)$, $\pi^0_i=0$. Из уравнений (3),(4),(5) следует, что

$$\delta\gamma^i=\gamma^i(\pi^0_0-\pi^i_i);\quad \delta\gamma^i_j=\gamma^i_j(\pi^j_j-\pi^i_i),\ (i\neq j);$$
$$\delta\gamma^i_{jm}=\gamma^i_{jm}(\pi^j_j+\pi^m_m-\pi^i_i-\pi^0_0),\ (i\neq j),\quad \delta\gamma^i_i=0.$$

Легко показать, что при фиксированных i,j,m каждое из полученных уравнений вполне интегрируемо.

Функция γ^i (i -фиксировано) является относительным инвариантом. Обращение его в нуль означает, что точка B лежит в гиперплоскости $(AA_1A_2\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_n)$. Если все относительные инварианты γ^i ($i=1,2,\ldots n$) равны нулю, то точки A и B совпадают. Этот случай мы исключаем из рассмотрения.

Геометрический объект γ^i_j $(i\neq j)$ тоже является относительным инвариантом. Если $\gamma^{i_0}_{j_0}=0$, то точка B_{j_0} принадлежит $(n-2)$-плоскости $(A_1\ldots A_{i_0-1}A_{i_0+1}\ldots A_n)$. Линия $\ell\subset\Omega$, как и линия $\bar\ell=f(\ell)\subset\bar\Omega$ проективного пространства P_n, называется двойной линией [4] отображения f, если в каждой точке $A\in\ell$ касательная к линии ℓ в этой точке пересекает касательную к линии $\bar\ell$ в точке $B=f(A)$.

Пусть все относительные инварианты γ^i_j $(i\neq j)$ равны нулю, тогда $\vec B_j=\gamma^j_j\vec A_j$. В этом случае все линии ω^i сети Σ_n-двойные в отображении f, но не общего вида, а специального, так как касательные (AA_i), (BB_i) к линиям ω^i и $\bar\omega^i$ пересекались в точках $A_i=B_i$, лежащих в заданной нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$.

Такие линии удобно называть двойными Π-линиями отображения f. Покажем, что для отображения $f:\Omega\to\bar\Omega|A\to B$ и заданных нормализаций $A\to\Pi_{n-1}(A)$; $B\to\Pi_{n-1}(B)$ существует единственная сеть двойных Π-линий.

Пусть точка A смещается по некоторой кривой ℓ: $\omega^i=\ell^i\theta$, где $\mathcal D\theta=\theta\wedge\theta_1$, $d\vec A=\omega^0_0\vec A+\theta\vec L$, $\vec L=\ell^i\vec A_i$, (AL) - касательная к кривой ℓ. Точка B смещается при этом по кривой $\bar\ell$: $\bar\omega^i=\ell^i\theta$, $d\vec B=\omega^0_0\vec B+\theta\vec{\bar L}$, $\vec{\bar L}=\ell^j\gamma^i_j\vec A_i$, $(B\bar L)$ - касательная к кривой $\bar\ell$.

Линия ℓ будет Π-двойной, если точки L и $\bar L$, лежащие в нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$, совпадают. Тогда $\lambda\ell^i=\ell^j\gamma^i_j$ $\qquad (*)$

Но ℓ^j не равны нулю одновременно, поэтому

$$\det\|\gamma^i_j-\delta^i_j\lambda\|=0.$$

В общем случае это характеристическое уравнение определяет n различных собственных значений аффинора (γ^i_j). А уравнения $(*)$ определяют n главных направлений аффинора (γ^i_j). Поэтому в общем случае в области Ω существует единственная сеть Σ двойных Π-линий отображения f.

Геометрический объект γ^i_i (i -фиксировано) -абсолютный инвариант. Пусть сеть Σ_n -сеть двойных Π-линий отображения f, тогда $\gamma^i_j=0$ $(i\neq j)$, а $\gamma^i_i\neq0$, и мы предполагаем, что все γ^i_i различные.

На прямой (AB) возникает n точек N^i_i: $\vec N^i_i=-\gamma^i_i\vec A+\vec B$.

Пусть точка C -точка пересечения прямой (AB) и плоскости $\Pi_{n-1}(A)$:

$$C=\Pi_{n-1}(A)\cap(AB). \qquad (7)$$

Можно показать, что дифференциал dN^i_i точки N^i_i разлагается по точкам A и B, если точка A смещается по линии ω^i сети Σ_n. Этим и раскрывается геометрический смысл абсолютного инварианта γ^i_i.

В нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$ можно рассмотреть n корреляций $\mathcal K^i$, определенных квадриками $Q^i:\gamma^i_{jk}x^jx^k=0$. Коэффициенты γ^i_{jk} в уравнениях квадрик Q^i являются относительными инвариантами. Если $\gamma^i_{jk}=0$ (i,j,k -фиксированы), то точки A_j,A_k сопряжены в корреляции $\mathcal K^i$.

Геометрический смысл обращения всех γ^i_{jk} в нуль будет показан ниже.

п.2. Связь между формами реперов $\mathcal R^A$ и $\mathcal R^B$ выражается равенствами (2) и следующими:

$$\bar\omega^0_0=\omega^0_0+\gamma^i\omega^0_i, \qquad (8)$$

$$\bar\omega^0_j=\gamma^i_j\omega^0_i, \qquad (9)$$

$$\bar\omega^i_j=\omega^i_j+\tilde\gamma^i_\ell\gamma^\ell_{jm}\omega^m+\delta^i_j\gamma^k\omega^0_k, \qquad (10)$$

где $\tilde\gamma^i_\ell$ - обращенный объект к объекту γ^j_i.

Реперы $\mathcal R^A$ и $\mathcal R^B$ построены на касательных к линиям сетей $\Sigma_n,\bar\Sigma_n$, поэтому формы ω^j_i $(i\neq j)$, как и формы $\bar\omega^j_i$ $(i\neq j)$, главные:

$$\omega^j_i=a^j_{ik}\omega^k,\quad \bar\omega^j_i=\bar a^j_{ik}\omega^k \quad (i\neq j). \qquad (11)$$

Продолжив систему (2), имеем [3]:

$$\tau^i_j-\delta^i_j\tau^0_0=b^i_{jk}\omega^k,\quad b^i_{jk}=b^i_{kj}, \qquad (12)$$

где $\tau^\beta_\alpha=\bar\omega^\alpha_\beta-\omega^\alpha_\beta$.

Из (11) и (12) получим:

$$\bar a^i_{jk}-a^i_{jk}=b^i_{jk} \quad (i\neq j). \qquad (13)$$

Система, определяющая характеристические направления, имеет вид [3],[7]:

$$b^i_{jk}\omega^j\omega^k = h\omega^i. \qquad (14)$$

Из (10),(12),(13) находим:

$$b^i_{jk} = \tilde{\gamma}^i_\ell \gamma^\ell_{jk}, \qquad (15)$$

$$\bar{a}^i_{jk} - a^i_{jk} = \tilde{\gamma}^i_\ell \gamma^\ell_{jk} \quad (i \neq j). \qquad (16)$$

Можно показать, что справедлива

Т е о р е м а. Если все относительные инварианты $\gamma^i_{jk} = 0$, то любое направление в точке A для отображения f -характеристическое. В этом случае f -проективное отображение, сохраняющее неподвижную нормализующую плоскость

п.3. Вернемся к общему случаю: пусть относительные инварианты γ^i_{jk} не равны нулю одновременно. Уравнения (14), определяющие характеристические направления отображения f, примут вид:

$$\tilde{\gamma}^i_\ell \gamma^\ell_{jk}\omega^j\omega^k = h\omega^i \qquad (14')$$

Здесь мы воспользовались равенствами (15). Линии ω^i сети Σ_n будут иметь характеристические направления тогда и только тогда, когда

$$b^i_{jj} = \tilde{\gamma}^i_\ell \gamma^\ell_{jj} = 0, \quad (i \neq j). \qquad (17)$$

Пусть сеть Σ_n -геодезическая, а следовательно [2], она состоит из прямых (AA_i) и характеристическая. Последнее означает, что все линии ω^i сети Σ_n имеют характеристические направления отображения f. В этом случае будут справедливы соотношения (17). Тогда из (16) и (17) следует, что сеть $\bar{\Sigma}_n$ -тоже геодезическая, образованная семействами прямых (BB_i). Можно показать, что справедливо утверждение. Если в плоскости $(AA_{j_0}A_{k_0})$ направления $(AA_{j_0}),(AA_{k_0})$ -характеристические и их ровно три, то третье направление совпадает с одним из данных. Любое направление плоскости $(AA_{j_0}A_{k_0})$ является характеристическим в отображении f тогда и только тогда, когда линии $\omega^{j_0}, \omega^{k_0}$ сети Σ_n являются характеристическими, а

$b^m_{j_0k_0} = 0 \quad (m \neq j_0, k_0)$.

п.4. Точка C, определенная формулой (7), имеет в реперах R^A и R^B следующие координаты:

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = \gamma^i\vec{A}_i = \gamma^j\gamma^i_j\vec{B}_i.$$

Возьмем на прямой (AB) точку D такую, что $(AB,CD)=\lambda$, где $\lambda = const$. Пусть точка A описывает линию ω^i, тогда все три точки B,C,D опишут свои линии: $\bar{\omega}^i, \omega^i_0, \omega^i_D$, причем:

$$d_i\vec{C} = \psi\vec{C} + \omega^i\vec{C}_i, \quad \vec{C}_i = a^\circ_{ki}\gamma^k\vec{A} + (\vec{B}_i - \vec{A}_i),$$

$$d_i\vec{D} = \phi\vec{D} + \omega^i\vec{D}_i, \quad \vec{D}_i = \lambda a^\circ_{ki}\gamma^k\vec{A} + (\vec{B}_i - \lambda\vec{A}_i).$$

Прямая $\ell = (C_iD_i)$, соединяющая точки C_i и D_i, пересекает нормализующую плоскость $\Pi_{n-1}(A)$ в точке B_i:

$$\lambda\vec{C}_i - \vec{D}_i$$

Обозначим через C^Π_i, D^Π_i проекции точек C_i, D_i из точки A на нормализующую плоскость $\Pi_{n-1}(A)$, тогда $\vec{C}^\Pi_i = \vec{B}_i - \vec{A}_i$, $\vec{D}^\Pi_i = \vec{B}_i - \lambda\vec{A}_i$. Сложное отношение четырех точек $A_i, B_i, C^\Pi_i, D^\Pi_i$ тоже равно λ.

Т е о р е м а. Если точка D, лежащая на прямой (AB), выбрана так, что $(AB,CD)=\lambda$, где $\lambda = const$, то $(A_iB_i; C^\Pi_iD^\Pi_i) = (AB;CD)$ и прямая, соединяющая точки C_i, D_i, пересекает нормализующую плоскость $\Pi_{n-1}(A)$ в точке B_i.

Список литературы

1. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей. Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина, 1965, №243, с.29-37.

2. Базылев В.Т. О нормализациях проективного пространства, порождаемых заданной в нем сетью. Лит.матем.сб., 1966, вып.6, №3, с.313-322.

3. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств. Уч.зап.МГПИ им. В.И.Ленина, 1970, №374, т.I, с.28-40.

4. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6 Калининград, 1975, с.19-25.

5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем. об-ва, 1953, т.2, с.275-383.

6. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.; Наука, 1976.

7. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-В кн.: Проблемы геометрии. М., 1963, с.65-107.