Библиографический список

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2 . 414 с.
2. Чешкова М. А. О паре гиперповерхностей в евклидовом пространстве // Геометрия многомерных пространств: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Алтайский ун-т. Барнаул, 1994. С. 78-85.
3. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. М.: ГИФМЛ, 1963. 540 с.
4. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. 1. 318 с.

M. A. C h e s h k o v a

ON A GEOMETRY OF A CENTRAL PROJECTION
OF A PAIR OF HYPERSURFACES

A pair of smooth hypersurfaces M, M and the central projection f: M→ M in Euclidean space are examined.

УДК 514.76

СВЯЗНОСТИ ГОЛОНОМНЫХ И НЕГОЛОНОМНЫХ ЦЕНТРОПРОЕКТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И. Шевченко

(*Калининградский государственный университет*)

Понятия проективной связности и пространства проективной связности определяются разными методами, имеют различный смысл и продолжают развиваться [1]-[17]. Широко известны объект проективной связности Томаса, проективная связность Картана, центропроективная и проективная связности в главных расслоениях соответствующих реперов. На дифференцируемом многообразии применяются разнообразные способы описания проективных связностей [18]-[22].

В статье производится одна из возможных проективизаций дифференцируемого многообразия, в результате которой касательные пространства многообразия становятся центропроективными пространствами той же размерности. Такое многообразие называется центропроективным. Выделяются голономные и неголономные центропроективные многообразия. С помощью этих многообразий естественно определяются центропроективная связность в голономном и неголономном случаях при одновременном их рассмотрении. Используется способ Лаптева [11], [14] задания связности в главном расслоении и трактовка А.К. Рыбникова [22] понятия связности.

Показано, что объекты кручения и кривизны центропроективной связности в неголономном случае не являются тензорами, а в голономном случае - тензоры. Определены обобщения нормализации Нордена, оснащений Картана и Бортолотти, выяснена их роль. Доказано, что нормаль 2-го рода нельзя перенести параллельно в общей центропроективной связности, но относительно так называемой нормализованной связности она переносится абсолютно параллельно.

1. **Проективизация**. Рассмотрим n-мерное многообразие V_n некоторого класса дифференцируемости. В любой точке $A \in V_n$ имеется касательное векторное пространство T_n размерности **n**. Произведём следующее построение:

1) наделим [23] каждое векторное пространство T_n структурой аффинного пространства с центром A и обозначим его A_n; 2) дополняя центроаффинное пространство A_n несобственной гиперплоскостью L_{n-1}, получим [3, с.105], [6, с.495] расширенное пространство $P_n = A_n \cup L_{n-1}$; 3) расширим действие линейной (центроаффинной) группы $GL(n)$, преобразующей центроаффинное пространство A_n, до действия коаффинной (центропроективной) группы $GA^*(n)$ в центропроективном пространстве P_n; 4) выполним аналогичные действия [22] с касательными пространствами высших порядков [24]. Этот процесс назовём проективизацией дифференцируемого многообразия V_n, а его результат - центропроективным многообразием W_n. Таким образом, центропроективное многообразие есть дифференцируемое многообразие, касательные пространства которого превращены в центропроективные пространства той же размерности, но не задано отображение соседнего центропроективного пространства на исходное пространство, называемое проективной связностью [5, с.339], [7], [11].

Исследуем центропроективное многообразие W_n. Отнесём центропроективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_i\}$, тогда для дифференциала точки A имеем

$$dA = \omega A + \omega^i A_i \ (i,j,k,l,m = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где чёрточки над аналитическими точками не пишутся; ω, ω^i - линейные дифференциальные формы, причём последние линейно независимы. В пространстве P_n фиксирован центр A, поэтому система уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируема, т.е. внешние дифференциалы форм ω^i имеют вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j. \tag{2}$$

Используя

$$D(dA) = 0, \tag{3}$$

продифференцируем уравнение (1) внешним образом

$$AD\omega + (dA_i - \omega_i^j A_j - \omega A_i) \wedge \omega^i = 0. \qquad (4)$$

Для разрешения этого уравнения по лемме Картана требуется выполнение структурного уравнения вида

$$D\omega = \omega^i \wedge \omega_i . \qquad (5)$$

Подставляя его в уравнение (4) и разрешая, получим

$$dA_i = \omega A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A + \omega^j A_{ij} , \qquad (6)$$

причём новые точки A_{ij} симметричны :

$$A_{[ij]} = 0. \qquad (7)$$

Они принадлежат соприкасающемуся пространству, т.е. касательному проективному пространству 2-го порядка $P^2 \supset P_n$,

$$\dim P^2 = \dim P_n + C_n^1 + C_n^2 = \frac{1}{2} n(n+3).$$

Возьмём внешние дифференциалы от обеих частей структурных уравнений (2),(5) :

$$\omega^j \wedge (D\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i) = 0 , \ \omega^i \wedge (D\omega_i - \omega_i^j \wedge \omega_j) = 0.$$

Разрешим полученные уравнения по обобщённой [20] лемме Картана

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i , \qquad (8)$$

$$D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij} , \qquad (9)$$

причём

$$\omega_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 , \ \omega_{ij} \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0. \qquad (10)$$

Уравнения (10) выполняются в голономном случае, когда формы ω_{jk}^i, ω_{ij} симметричны :

$$\omega_{[jk]}^i = 0, \ \omega_{[ij]} = 0. \qquad (11)$$

Однако равенства (11) не являются необходимыми [20, с.142] для справедливости условий (10), поэтому в общем случае формы ω_{jk}^i, ω_{ij} несимметричны по нижним индексам.

Учитывая, что

$$D(dA_i) = 0, \qquad (12)$$

продолжим уравнения (6) :

$$dA_{ij} = \omega_i^k A_{kj} + \omega_j^k A_{ik} + \omega A_{ij} + \omega_i A_j + \omega_j A_i + \omega_{ij}^k A_k + \omega_{ij} A + \omega^k A_{ijk} , \qquad (13)$$

причём точки A_{ijk} согласно лемме Картана симметричны по индексам j,k :

$$A_{i[jk]} = 0. \qquad (14)$$

Альтернируя уравнения (13) с использованием соотношений (7), найдём

$$\omega^k_{[ij]}A_k + \omega_{[ij]}A + \omega^k A_{[ij]k} = 0,$$

откуда вытекают равенства (11) и $A_{[ij]k}=0$, которые вместе с соотношениями (14) дают симметричность точек A_{ijk} по всем индексам. Точки A_{ijk} принадлежат касательному пространству 3-го порядка $P^3 \supset P^2$,

$$\dim P^3 = \dim P^2 + C^1_n + 2C^2_n + C^3_n = \frac{1}{6}n(n^2+6n+11).$$

Дальнейшие продолжения уравнений (13) вводят симметричные точки $A_{i_1\ldots i_r}$, принадлежащие касательному проективному пространству P^r порядка r. Размерность проективного пространства P^r совпадает с размерностью [20], [23], [24] линейного пространства T^r того же порядка, касательного к дифференцируемому многообразию V_n : $\dim P^r = \dim T^r = C^r_{n+r} - 1$.

2. Неголономность. При фиксации точки A центропроективного многообразия W_n уравнения (1), (6), (8), (9) упрощаются :

$$\delta A = \pi A, \ \delta A_i = \pi A_i + \pi^j_i A_j + \pi_i A \ ; \tag{15}$$

$$D\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k, \ D\pi_i = \pi^j_i \wedge \pi_j, \tag{16}$$

где $\delta = d\big|_{\omega^i=0}$, $\pi = \omega\big|_{\omega^i=0}$. Равенства (15) являются деривационными формулами подвижного репера 1-го порядка $R^1 = \{A, A_i\}$ центропроективного пространства P_n, в котором действует коаффинная группа $GA^*(n)$ со структурными уравнениями (4). Пространство P_n и группу $GA^*(n)$ обозначим P^1 и PD^1; назовём их проективным пространством и проективно-дифференциальной [20] группой 1-го порядка, $\dim PD^1 = \mathbf{n(n+1)}$.

Продолжая структурные уравнения (8), (9), получим

$$D\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}, \tag{17}$$

$$D\omega_{ij} = \omega^k_{ij} \wedge \omega_k - \omega_{ik} \wedge \omega^k_j - \omega_{kj} \wedge \omega^k_i + \omega^k \wedge \omega_{ijk}, \tag{18}$$

причём $\omega^i_{jkl} \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0$, $\omega_{ijk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0$.

Из уравнений (13),(17), (18) следует

$$\delta A_{ij} = \pi A_{ij} + \pi^k_i A_{kj} + \pi^k_j A_{ik} + \pi_i A_j + \pi_j A_i + \pi^k_{ij} A_k + \pi_{ij} A, \tag{19}$$

$$\begin{cases} D\pi^i_{jk} = \pi^l_{jk} \wedge \pi^i_l - \pi^i_{lk} \wedge \pi^l_j - \pi^i_{jl} \wedge \pi^l_k, \\ D\pi_{ij} = \pi^k_{ij} \wedge \pi_k - \pi_{ik} \wedge \pi^k_j - \pi_{kj} \wedge \pi^k_i, \end{cases} \tag{20}$$

где формы π^i_{jk}, π_{ij} симметричны по нижним индексам согласно условиям (11). Равенства (15), (19) есть деривационные формулы подвижного репера 2-го порядка $R^2 = \{A, A_i, A_{ij}\}$ проективного пространства P^2 ($A \in P^1 \subset P^2$), в котором действует группа Ли со структурными уравнениями (16), (20). Эту группу обозначим PD^2 и назовём [20] проективно-дифференциальной группой 2-го порядка, $\dim PD^2 = \frac{1}{2} n(n+1)(n+3)$. Продолжения структурных уравнений (17), (18) и фиксация точки $A \in W_n$ приведут к действующей в проективном пространстве $P^r (A \in P^1 \subset \ldots \subset P^{r-1} \subset P^r)$ проективно-дифференциальной группе PD^r порядка **r**, $\dim PD^r = (n+1)(C^r_{n+r} - 1)$.

Если предположения (3),(12),... не справедливы, т.е. дифференциалы dA, dA_i,... не являются полными (см., например, [6, с.469], [19]), то получить уравнения (6),(13),... путём продолжений уравнения (1) не удаётся. Однако, будем предполагать, что они имеют место, но точки A_{ij}, A_{ijk},... несимметричны. Тогда нельзя доказать симметричность форм ω^i_{jk}, ω_{ij}; ω^i_{jkl}, ω_{ijk};... по нижним индексам. В этом общем случае будем говорить о неголономном проективном многообразии $\widetilde{W}_n$ (n>1), в каждой точке A которого имеется неголономное касательное проективное пространство $\widetilde{P}^r$ порядка **r** (**r**=1,2,...), в котором действует неголономная проективно-дифференциальная группа NPD^r, причём

$$\dim \widetilde{P}^r = n(1 + n + \ldots + n^{r-1}), \ \dim NPD^r = \mathbf{(n+1)} \dim \widetilde{P}^r = \frac{n(n+1)}{n-1}(n^r - 1).$$

Обозначая D^r и ND^r голономные [4], [20] и неголономные [8], [20] дифференциальные группы, имеем таблицу включений

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & ND^1 & \subset & ND^2 & \subset & \ldots & \subset & ND^r & \subset & \ldots \\ GL(n) & = & D^1 & \subset & D^2 & \subset & \ldots & \subset & D^r & \subset & \ldots \\ GA^*(n) & = & PD^1 & \subset & PD^2 & \subset & \ldots & \subset & PD^r & \subset & \ldots \\ & & NPD^1 & \subset & NPD^2 & \subset & \ldots & \subset & NPD^r & \subset & \ldots \end{array},$$

кроме того, $ND^r \subset NPD^r$.

В неголономном случае при обозначениях $\widetilde{W}_n$ и $\widetilde{P}^r$ можно не употреблять тильду, а для различия размерностей подпространств писать $\dim \widetilde{P}^r = \mathrm{Dim} P^r$. Итак, под центропроективным многообразием W_n подразумевается, вообще говоря, неголономное многообразие.

3. Существование. Покажем существование голономных и неголономных центропроективных многообразий, исходя из соответствующих дифференцируемых многообразий [24]. Формы ω^i называются [20] структурными формами дифференцируемого многообразия V_n. Их продолжения ω^i_j удовлетворяют уравнениям (8), из которых следует $D\omega_i^i = \omega^k \wedge \omega_{ik}^i$. Сравнивая это уравнение с уравнением (5), положим

$$\omega = \omega_i^i \,,\ \omega_i = \omega_{ki}^k . \qquad (21)$$

Свёртывая уравнения (17) по индексам i, j, найдём

$$D\omega_{ik}^i = -\omega_{il}^i \wedge \omega_k^l + \omega^l \wedge \omega_{ikl}^i .$$

Сопоставляя это с уравнениями (9), убеждаемся в справедливости второй совокупности равенств (21), а также в необходимости соотношений $\omega_{ij} = \omega_{kij}^k$. Для произвольного порядка **r** нужно взять

$$\omega_{i_1 \dots i_r} = \omega_{k i_1 \dots i_r}^k . \qquad (22)$$

Определение 1. Если формы $\omega_{j_1 \dots j_{r+1}}^i$, $\omega_{i_1 \dots i_r}$ центропроективного многообразия W_n связаны зависимостями (22), то назовём его многообразием Лемлейна [18] и обозначим W_n^L.

Выше доказано существование многообразия Лемлейна W_n^L с помощью дифференцируемого многообразия V_n, причём в общем случае многообразия V_n и W_n^L одновременно голономны, либо неголономны.

4. Расслоения центропроективных реперов. Над многообразием W_n возникает главное расслоение центропроективных реперов 1-го порядка $C^1(W_n)$ со структурными уравнениями (2), (8), (9), типовым слоем которого является центропроективная группа C^1=$GA^*(n)$, действующая в касательном центропроективном пространстве P_n. Это расслоение содержит подрасслоение линейных реперов $L(W_n)$с уравнениями (2), (8), базой которого служит многообразие W_n, а типовым слоем - линейная группа L=$GL(n) \subset C^1$, действующая неэффективно в **(n-1)**-мерном проективном пространстве направлений [13] касательного центропроективного пространства P_n.

С неголономным многообразием $\widetilde{W}_n$ ассоциируется расслоение неголономных центропроективных реперов 2-го порядка $\widetilde{C}^2(\widetilde{W}_n)$. Оно имеет структурные уравнения (2), (8), (9), (17), (18), базу $\widetilde{W}_n$ и типовой слой - неголономную проективно-дифференциальную группу 2-го порядка $\widetilde{C}^2 = NPD^2$. Над голономным многообразием W_n строится расслоение голономных центропроективных реперов 2-го порядка $C^2(W_n)$ с теми же структурными уравнениями, к которым присоединены условия (11), и типовым слоем - проективно-дифференциальной группой 2-го порядка C^2= ND^2. Продолжения уравнений (17), (18) приводят к структурным уравнениям главных расслоений центропроективных реперов высших порядков.

5. ***Центропроективная связность***. Фундаментально-групповая связность в главном расслоении центропроективных реперов $C^1(W_n)$ задаётся способом Лаптева с помощью форм

$$\theta^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k, \ \theta_i = \omega_i - \Gamma_{ij}\omega^i, \tag{23}$$

где Γ^i_{jk}, Γ_{ij} - некоторые функции. Внешние дифференциалы форм (23) имеют вид

$$\begin{cases} D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \omega^k \wedge (\nabla\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk}) - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}\omega^k \wedge \omega^l, \\ D\theta_i = \theta^j_i \wedge \theta_j + \omega^j \wedge (\nabla\Gamma_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega_k + \omega_{ij}) - \Gamma^l_{ij}\Gamma_{lk}\omega^j \wedge \omega^k, \end{cases} \tag{24}$$

где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j + \Gamma^l_{ik}\omega^i_l.$$

Согласно теореме Картана-Лаптева [11], [14] центропроективная связность в расслоении $G^1(W_n)$ задаётся полем объекта $\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$ на базе W_n:

$$\nabla\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l, \ \nabla\Gamma_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega_k + \omega_{ij} = \Gamma_{ijk}\omega^k. \tag{25}$$

Подставляя эти дифференциальные уравнения в систему (24), запишем структурные уравнения форм центропроективной связности

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \ D\theta_i = \theta^j_i \wedge \theta_j + R_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

причём компоненты объекта центропроективной кривизны $R=\{R^i_{jkl}, R_{ijk}\}$ выражаются по формулам

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]}, \ R_{ijk} = \Gamma_{i[jk]} - \Gamma^l_{i[j}\Gamma_{lk]}, \tag{26}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование по крайним индексам в них.

Внося формы центропроективной связности (23) в структурные уравнения (2), (5), получим

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \theta^i_j + S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \ D\omega = \omega^i \wedge \theta_i + S_{ij}\omega^i \wedge \omega^j,$$

причём компоненты объекта кручения [18] центропроективной связности $S=\{S^i_{jk}, S_{ij}\}$ имеют вид: $S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}$, $S_{ij} = \Gamma_{[ij]}$. Результат альтернирования дифференциальных уравнений (25) запишем следующим образом

$$\nabla S^i_{jk} + \omega^i_{[jk]} \equiv 0, \ \nabla S_{ij} + S^k_{ij}\omega_k + \omega_{[ij]} \equiv 0, \tag{27}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^l.

Продолжая уравнения (25), найдём

$$\nabla\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{kl} - \Gamma^i_{mk}\omega^m_{jl} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_{ml} + \omega^i_{jkl} \equiv 0,$$

$$\nabla\Gamma_{ijk} - \Gamma_{il}\omega^l_{jk} - \Gamma_{lj}\omega^l_{ik} + \Gamma^l_{ijk}\omega_l + \Gamma^l_{ij}\omega_{lk} + \omega_{ijk} \equiv 0,$$

откуда с помощью уравнений (25) и формул (26) получим

$$\begin{cases} \nabla R^{i}_{jkl} - \Gamma^{i}_{jm}\omega^{m}_{[kl]} + \omega^{i}_{j[kl]} \equiv 0, \\ \nabla R_{ijk} + R^{l}_{ijk}\omega_{l} - \Gamma_{il}\omega^{l}_{[jk]} + \omega_{i[jk]} \equiv 0. \end{cases} \tag{28}$$

Из сравнений (27), (28) следует

Теорема 1. Объекты кручения S и кривизны R центропроективной связности неголономного центропроективного многообразия $\widetilde{W}_n$ не являются тензорами, для голономного многообразия W_n эти объекты - тензоры.

Замечание. Задающий связность в расслоении $C^1(W_n)$ объект центропроективной связности Γ содержит [9, с.206], [18, с.121] объект линейной связности Γ^i_{jk}, определяющий связность в подрасслоении $L(W_n)$.

6. Нормализация и оснащения. В каждом касательном центропроективном пространстве P_n рассмотрим не проходящую через точку касания A гиперплоскость N_{II}. Она является аналогом нормали 2-го рода Нордена [25, с.197]. Зададим нормаль N_{II} совокупностью точек $B_i=\mathbf{A}_i+\lambda_i A$. Их дифференциалы приводятся к виду

$$dB_i=\omega B_i+\omega^j_i B_j+(\nabla\lambda_i+\omega_i)A+\omega^j(A_{ij}+\lambda_i A_j), \tag{29}$$

откуда вытекают уравнения

$$\nabla\lambda_i+\omega_i=\lambda_{ij}\omega^j, \tag{30}$$

обеспечивающие инвариантность нормали N_{II}. Продолжая их, найдём

$$\nabla\lambda_{ij}-\lambda_k\omega^k_{ij}+\omega_{ij}\equiv 0. \tag{31}$$

Для единообразия изучения голономного и неголономного центропроективных многообразий в голономном случае будем считать функции λ_{ij} симметричными.

Подставляя уравнения (30) в равенства (29) и преобразуя их, имеем

$$dB_i=\omega B_i+(\omega^j_i+\lambda_i\omega^j)B_j+\omega^j B_{ij}, \tag{32}$$

где

$$B_{ij}=A_{ij}+(\lambda_{ij}-\lambda_i\lambda_j)A.$$

Точки B_{ij} удовлетворяют сравнениям

$$\nabla B_{ij}\equiv\omega B_{ij}+\omega^k_{ij}B_k+\omega_i B_j+\omega_j B_i,$$

откуда видно, что они вместе с точками B_i определяют продолженную нормаль 2-го рода $N'_{II}=[B_{ij},B_i]$: $N_{II}\subset N'_{II}$, $\mathbf{A}\oplus N'_{II}=P^2$; $\mathrm{Dim}\, N'_{II}=\mathbf{n^2+n-1}$, $\dim N'_{II}=\frac{1}{2}\mathbf{n(n+3)-1}$.

Теорема 2. Нормализация 2-го рода многообразия W_n и её продолжение сводят центропроективную связность к линейной связности.

Доказательство даётся формулой

$$\overset{N}{\Gamma}_{ij}=\lambda_{ij}+\Gamma^k_{ij}\lambda_k, \tag{33}$$

проверяемой с помощью соотношений (25), (30), (31).

Определение 2. Центропроективную связность, задаваемую полем объекта $(\Gamma^k_{ij}, \overset{N}{\Gamma}_{ij})$, назовём нормализованной.

Возьмём точки $C_{ij}=A_{ij}+\mu^k_{ij}A_k+\mu_{ij}A$, причём в голономном случае коэффициенты симметричны: $\mu^k_{[ij]}=0, \mu_{[ij]}=0$. Подействуем на них оператором∇:

$$\nabla C_{ij}\equiv\omega C_{ij}+(\nabla\mu^k_{ij}+\omega^k_{ij}+\delta^k_i\omega_j+\delta^k_j\omega_i)A_k+(\nabla\mu_{ij}+\mu^k_{ij}\omega_k+\omega_{ij})A.$$

Совокупность точек C_{ij} инвариантна, если выполняются уравнения

$$\nabla\mu^k_{ij}+\omega^k_{ij}+\delta^k_i\omega_j+\delta^k_j\omega_i=\mu^k_{ijl}\omega^l, \tag{34}$$

$$\nabla\mu_{ij}+\mu^k_{ij}\omega_k+\omega_{ij}=\mu_{ijk}\omega^k. \tag{35}$$

Квазитензор $\{\mu^k_{ij},\mu_{ij}\}$ определяет аналог плоскости Картана [2] - плоскость $C=[C_{ij}]$:

$$C\cap P_n=\varnothing,\ C\oplus P_n=P^2;\ \mathrm{Dim}C=\mathbf{n^2\text{-}1},\ \mathrm{dim}C=\tfrac{1}{2}\mathbf{n(n+1)\text{-}1}.$$

Подобъект μ^k_{ij} задаёт аналог 1-ой нормали Нордена [25] - плоскость $N_I=A\oplus C=[C_{ij},A]$, $\mathrm{Dim}N_I=\mathbf{n^2}$, $\mathrm{dim}N_I=\tfrac{1}{2}\mathbf{n(n+1)}$.

Определение 3. Нормализацией центропроективного многообразия W_n называется присоединение к каждой точке $A\in W_n$ нормалей двух родов N_I и N_{II}:

$$N_I\cap P_n=A,\ N_I+P_n=P^2;\ A\oplus N_{II}=P_n,$$

причём не предполагается существование плоскости Картана $C\subset N_I$.

Теорема 3. Нормализация многообразия W_n позволяет задать линейную связность в расслоении линейных реперов $L(W_n)$.

Доказательство вытекает из формулы

$$\overset{N}{\Gamma}{}^k_{ij}=\mu^k_{ij}-\delta^k_i\lambda_j-\delta^k_j\lambda_i, \tag{36}$$

справедливость которой подтверждают соотношения (25), (30), (34).

Следствие (Т.2, Т.3). Нормализация многообразия W_n индуцирует нормализованную центропроективную связность.

Определение 4. Композиционным оснащением [26] центропроективного многообразия назовём присоединение к нему полей двух плоскостей: плоскости Картана C и нормали 2-го рода N_{II}.

Это оснащение порождает нормализацию, поэтому индуцирует нормализованную центропроективную связность.

Теорема 4. Композиционное оснащение многообразия W_n даёт возможность задать центропроективную связность, не являющуюся нормализованной.

Доказательство дают формула (36) и следующая

$$\overset{C}{\Gamma}_{ij}=\mu_{ij}-\lambda_i\lambda_j, \qquad (37)$$

проверяемая с помощью соотношений (25), (30), (34),(35).

Рассмотрим симметричные в голономном случае точки $D_{ij}=A_{ij}+\nu_{ij}A$, для которых

$$\nabla D_{ij}\equiv\omega D_{ij}+(\omega^k_{ij}+\delta^k_i\omega_j+\delta^k_j\omega_i)B_k+(\nabla\nu_{ij}-\lambda_k\omega^k_{ij}-\lambda_i\omega_j-\lambda_j\omega_i+\omega_{ij})A.$$

Если выполняются дифференциальные сравнения

$$\nabla\nu_{ij}-\lambda_k\omega^k_{ij}-\lambda_i\omega_j-\lambda_j\omega_i+\omega_{ij}\equiv 0, \qquad (38)$$

то инвариантна гиперплоскость $B=[D_{ij},B_k]$ соприкасающегося пространства P^2, содержащая нормаль 2-го рода N_{II} и не проходящая через центр A, причём

$$\mathrm{Dim}B=\mathbf{n^2+n-1},\ \dim B=\tfrac{1}{2}\mathbf{n(n+3)-1}.$$

Объект ν_{ij} образует геометрический объект лишь в совокупности с квазитензором λ_i, определяющим нормаль 2-го рода $N_{II}=B\cap P_n$. Итак, аналог гиперплоскости Бортолотти [12], [27] - плоскость B задаётся квазитензором $\{\nu_{ij},\lambda_i\}$.

Определение 5. Оснащением Бортолотти центропроективного многообразия W_n назовём присоединение к каждой точке $A\in W_n$ плоскости B: $A\oplus B=P^2$.

Теорема 5. Оснащение Бортолотти многообразия W_n сводит центропроективную связность к линейной.

Доказательство следует из формулы

$$\overset{B}{\Gamma}_{ij}=\nu_{ij}+\Gamma^k_{ij}\lambda_k+\lambda_i\lambda_j, \qquad (39)$$

справедливость которой подтверждают соотношения (25), (30), (38).

Выясним условия совпадения разными способами охваченных (33), (37), (39) компонент $\mathbf{\Gamma}_{ij}$ объекта центропроективной связности $\mathbf{\Gamma}$ в предположении, что многообразие W_n и линейная связность нормализованы ($\Gamma^i_{jk}=\overset{N}{\Gamma}{}^i_{jk}$):

$$\overset{B}{\Gamma}_{ij}=\overset{C}{\Gamma}_{ij}\quad \begin{matrix}\mu_{ij}=\nu_{ij}+\mu^k_{ij}\lambda_k \Leftrightarrow C=N_I\cap B\\ \nu_{ij}=\mu_{ij}-\mu^k_{ij}\lambda_k \Leftrightarrow B=N_{II}\oplus C,\end{matrix}$$

т.е. оснащение Картана, подчинённое нормализации 1-го рода ($C\subset N_I$), эквивалентно оснащению Бортолотти, порождающему нормализацию 2-го рода ($B\supset N_{II}$);

$$\overset{C}{\Gamma}_{ij}=\overset{N}{\Gamma}_{ij}\Leftrightarrow\mu_{ij}=\lambda_{ij}+\mu^k_{ij}\lambda_k-\lambda_i\lambda_j\Leftrightarrow C=N_I\cap N'_{II},$$

т.е. оснащение Картана порождено нормализацией, точнее, нормализацией 1-го рода и продолженной нормализацией 2-го рода;

$$\overset{B}{\Gamma}_{ij}=\overset{N}{\Gamma}_{ij}\Leftrightarrow\nu_{ij}=\lambda_{ij}-\lambda_i\lambda_j\Leftrightarrow B=N'_{II},$$

т.е. оснащение Бортолотти порождено нормализацией 2-го рода, точнее, её продолжением, причём этот случай не зависит от охвата $\Gamma^i_{jk} = \overset{N}{\Gamma}{}^i_{jk}$.

Теорема 6. Нормализация 1-го рода многообразия Лемлейна порождает нормализацию 2-го рода.

Доказательство. Нормализация 1-го рода задаётся полем квазитензора μ^k_{ij}. Из системы уравнений (34) следует $\nabla\mu^i_{ik}+\omega^i_{ik}+\mathbf{(n+1)}\omega_k\equiv0$. На многообразии Лемлейна $\omega^i_{ik}=\omega_k$, поэтому можно положить $\lambda_k=\dfrac{1}{n+2}\mu^i_{ik}$. Квазитензор λ_k определяет нормаль 2-го рода N_{II}.

Замечания. 1) В голономном случае А.К. Рыбников [22] называет нормаль 1-го рода N_I проективной нормалью, нормаль 2-го рода N_{II} - касательным оснащением, плоскость Картана $C\subset N_I$ - оснащением нормали, плоскость Бортолотти $B\supset N_{II}$ - оснащением соприкасающегося пространства.

2) Задание поля оснащённых проективных нормалей равносильно [22] заданию проективной связности Картана без кручения; для центропроективной связности аналогичное утверждение не справедливо.

3) Структура голономного центропроективного многообразия по существу совпадает с проективной структурой Лаптева [20], но отличается по форме аналитического описания, что вызывает различие при задании связностей [22].

4) Продолженная нормаль N'_{II} в голономном случае, фактически, совпадает с продолженным касательным оснащением [22].

5) Если на голономном многообразии W_n при $\mathbf{n>1}$ функции λ_{ij} не считать симметричными, то будут несимметричными точки B_{ij} и продолженная нормаль N'_{II} заполнит соприкасающееся пространство P^2, но формула (33) сохранится.

7. Параллельный перенос. Вводя формы центропроективной связности (23) в дифференциальные уравнения (30), получим $\Delta\lambda_i=\lambda_{i|j}\omega^j$, причём ковариантный дифференциал $\Delta\lambda_i$ и ковариантные производные $\lambda_{i|j}$ квазитензора λ_i выражаются по формулам

$$\Delta\lambda_i=d\lambda_i-\lambda_j\theta^j_i+\theta_i,\ \lambda_{i|j}=\lambda_{ij}-\Gamma_{ij}+\lambda_k\Gamma^k_{ij}.$$

Внешний дифференциал от ковариантного дифференциала $\Delta\lambda_i$ имеет вид

$$D\Delta\lambda_i=\theta^j_i\wedge\Delta\lambda_j+(R_{ijk}-\lambda_l R^l_{ijk})\omega^j\wedge\omega^k.$$

Значит, система уравнений $\Delta\lambda_j=0$ вполне интегрируема вдоль любой линии $l\subset W_n$, проходящей через точку A и задаваемой уравнениями $\omega^i=\rho^i\vartheta$, где ρ^i - функции на линии l, ϑ - параметрическая форма.

Теорема 7. Ковариантные производные $\lambda_{i|j}$ квазитензора λ_i относительно центропроективной связности Γ образуют тензор, а по отношению к нормализованной связности равны нулю.

Доказательство. Ковариантные производные $\lambda_{i|j}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\nabla\lambda_{i|j}\equiv 0$, проверяемым с помощью соотношений (25), (30), (31), т.е. составляют тензор. Равенства $\lambda_{i|j}=0$ эквивалентны формуле (33).

Преобразуем формулу (29):

$$\nabla B_i=\omega B_i+\lambda_i\omega^j B_j+\Delta\lambda_i A+\omega^j E_{ij}, \tag{40}$$

где

$$E_{ij}=B_{ij}-\lambda_{i|j}A,\ \nabla E_{ij}\equiv\omega E_{ij}+\omega^k_{ij}B_k+\omega_i B_j+\omega_j B_i,$$

т.е. инвариантна плоскость $E=[E_{ij},B_k]$, являющаяся плоскостью типа Бортолотти.

Если центропроективная связность нормализована, то $\lambda_{i|j}=0$, $\Delta\lambda_i=0$, $E_{ij}=B_{ij}$, $E=N_{II}$, т.е. любое смещение нормали 2-го рода N_{II} есть её параллельный перенос в нормализованной связности.

В общем случае согласно формуле (32) нормаль N_{II} всегда смещается внутри продолженной нормали N'_{II}. С другой стороны, из формулы (40) при $\Delta\lambda_i=0$ вдоль линии l следует, что нормаль N_{II} должна переноситься в гиперплоскости E. Но $E\cap N'_{II}=N_{II}$, поэтому нормаль N_{II} будет переноситься параллельно в общей центропроективной связности лишь тогда, когда она остаётся на месте.

Теорема 8. Нормаль 2-го рода N_{II} при произвольном смещении вдоль многообразия W_n переносится абсолютно параллельно в нормализованной центропроективной связности, но, вообще говоря, не может переноситься параллельно в произвольной центропроективной связности.

Поясним теорему. Уравнения параллельного переноса $\Delta\lambda_i|_l=0$ эквивалентны системе

$$\lambda_{i|j}\rho^j=0. \tag{41}$$

Эти **n** линейных однородных уравнений с **n** неизвестными ρ^j должны определять линию l, вдоль которой осуществляется параллельный перенос. Обозначим $\mathbf{r}=\mathrm{rank}(\lambda_{i|j})$, тогда $0\le\mathbf{r}\le\mathbf{n}$. Система (41) определяет линию l с произволом $\infty^{\mathbf{n}-\mathbf{r}-1}$, т.е. существует $(\mathbf{n}-\mathbf{r})$ - мерное подмногообразие $l_{n-r}\subset W_n$, вдоль которого нормаль N_{II} переносится параллельно. В общем случае $\mathbf{r}=\mathbf{n}$- есть только тривиальное решение $\rho^j=0$, т.е. нормаль N_{II} нельзя перенести параллельно ($l_{n-r}=l_0=A$). В особом случае $\mathbf{r}=0\Leftrightarrow\lambda_{i|j}=0$ - любой набор ρ^j является решением системы (41), т.е. смещение нормали N_{II} вдоль произвольной кривой l является параллельным переносом относительно нормализованной связности ($l_{n-r}=l_n=W_n$). В остальных случаях $0<\mathbf{r}<\mathbf{n}$ - вдоль одних кривых параллельный перенос реализуется, вдоль других - нет. Размерность подмногообразия параллельности l_{n-r} зависит от структуры поля нормалей N_{II} и характера центропроективной связности $\mathbf{\Gamma}$.

Библиографический список

1. Cartan E. Lecons sur la theorie des espaces a connexion projective. Paris, 1937. 308 p.
2. Картан Э. Пространства проективной связности // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. М.;Л., 1937. Вып.4. С.160-173.
3. Веблен О. и Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. М., 1949. 230с.
4. Вагнер В.В. Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии // Основания дифференциальной геометрии. М., 1949. С.135-223.
5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т.2. С.275-382.
6. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М., 1960. 560 с.
7. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962. 210 с.
8. Лумисте Ю.Г. Связности в однородных расслоениях // Мат. сб. 1966. Т.69. С.434-469.
9. Близникас В.И. О геометрии некоторых классов оснащённых расслоенных пространств: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Вильнюс, 1970. 339 с.
10. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения **m**-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семин. М., 1971. Т.3. С.49-93.
11. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Германа Фёдоровича Лаптева // Там же, 1973. Т.4. С.7-70.
12. *Столяров А.В.* Двойственные линейные связности на оснащённых многообразиях пространства проективной связности // Проблемы геометрии. М., 1976. Т.8. С.25-46.
13. Чакмазян А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_n в P_n // Там же, 1978. Т.10. С.55-74.
14. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Там же, 1979. Т.9. 248 с.
15. Ивлев Е.Т., Кулеш В.А. О распределениях $\Delta_{2,m}$ расслоения $P_{m,n}$ / Томск. Политех. ин-т. 1982. 30с. Деп. в ВИНИТИ, № 1257-83.
16. Шевченко Ю.И. Об оснащении Картана // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1983. Вып.14. С.107-110.
17. Шевченко Ю.И. О проективной связности Картана, индуцированной на поверхности // Там же, 1988. Вып.19. С.121-126.
18. Лемлейн В.Г. Локальные центропроективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии // Лит. мат. сб. 1964. Т.4. №1. С.41-132.
19. Vaisman J**.** Asupra geometriei directiilor de pe o varietate differentiabila // An. Univ. Timisoara. Ser. stiinte mat.-fiz. 1964. V.2. P.249-263.
20. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. М., !966. Т.1. С.139-189.

21. Cruceanu V. Structures et connexions classiques sur une variete differentiable // Ann. sti. Univ. Iasi. 1976. Sec. la. V.22. №2. P.181-190.
22. Рыбников А.К. Проективные и конформные нормали и связности // Изв. вузов. Мат. 1986. №1. С.60-69.
23. Вагнер В.В. Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков // Тр. семин. по вект. и тенз.анализу. 1956. Вып.10. С.31-88.
24. Шевченко Ю.И. Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1994. Вып.25. С.110-121.
25. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976. 432 с.
26. Шевченко Ю.И. Структура оснащения многообразия линейных фигур // Тез. докл. VI Прибалт. геом. конф. Таллин, 1984. С.137-138.
27. Bortolotti E. Connessioni nelle varieta luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933. V.3. P.81-89.

Ju. I. Shevchenko

THE CONNECTIONS OF HOLONOMIC AND NONHOLONOMIC CENTROPROJECTIVE MANIFOLDS

Concepts of projective connection and spaces of projective connection are defined by different methods, have different meanings and continue to develop. The object of projective connection of Tomas, the projective connection of Cartan, the centroprojective and projective connections in principal bundles of corresponding frames are well known today. Different methods of description of a projective connection are applied on a differentiable manifold.

One of the various projectivisations of the differentiable manifold is conducted in this article and as a result of which tangent spaces of a manifold become centroprojective spaces of the same dimention. Such a manifold is called a centroprojective one. Holonomic and nonholonomic centroprojective manifolds are selected. Using these manifolds the centroprojective connection is naturally defined in the holonomic and nonholonomic cases under the condition of their simultaneous consideration. Laptev's method of the representation of a connection in a principal bundle and Rybnikov's interpretation of the concept of a connection are used.

It is shown that the torsion and the curvature objects of a centroprojective bundle in the nonholonomic case are not tensors, but they are tensors in the holonomic case. The generalizations of Norden's normalization, Cartan's and Bortolotti's framings are defined and their role is also explained. It is proved that the normal of the second kind cannot be carried in parallel in a general centroprojective connection, but relatively to the so-called normalized connection it is carried absolutely parallel.