По доказанному выше получаем: A=A_1, B=B_1, C=C_1, D =D_1, — что доказывает единственность разложения векторного поля $\widetilde{X}$ в полученном виде: $\widetilde{X} = A^{H\gamma} + B^H + C^{V\gamma} + D^V + (\mathrm{A} * \mathrm{W})^{V\gamma_\varepsilon^2}$.

Список литературы

1. *Монахова О.А.* Горизонтальный лифт линейной связности на расслоение дважды ковариантных тензоров / Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 88—92.

O. Monakhova

DECOMPOSITION FOR INFINITESIMAL AFFINE TRASFORMATION ON THE BUNDLE $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$

We construct decomposition for infinitesimal affine transformation of horizontal lift of linear connection on the bundle of the tensors of the type (0,2).

УДК 514.76

М.В. Моргун

(Пензенский государственный педагогический университет)

О РАЗМЕРНОСТЯХ АЛГЕБР ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Устанавливается наибольшая размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений двух пространств аффинной связности при условии, что по крайней мере одно из них не является локально проективно плоским.

Пусть M^n и N^m — гладкие многообразия класса C^∞, ${}^1\nabla$ и ${}^2\nabla$— линейные связности на них (соответственно). Известно [1], что $\nabla = {}^1\nabla \times {}^2\nabla$ является линейной связностью на $M^n \times N^m$ со следующими компонентами:

$\Gamma^k_{ij} = {}^1\Gamma^k_{ij}, \Gamma^{n+\gamma}_{n+\alpha\ n+\beta} = {}^2\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, остальные $\Gamma^C_{AB} = 0$,

$i, j, k = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m;\ A, B, C = 1, \ldots, n+m;$

где ${}^1\Gamma_{ij}^k, {}^2\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ — компоненты связностей ${}^1\nabla$ и ${}^2\nabla$.

Обозначим через $g(M^n \times N^m)$ алгебру Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(M^n \times N^m, \nabla)$ $X \in g(M^n \times N^m)$ тогда и только тогда, когда

$$L_X \nabla = 0, \tag{1}$$

где L_X — символ производной Ли относительно векторного поля X. Условие (1) равносильно в локальных координатах системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} X^M_B = \partial_B X^M, \\ \partial_B X^A_C + \Gamma^A_{MC} X^M_B + \Gamma^A_{BM} X^M_C - \Gamma^M_{BC} X^A_M + X^M \partial_M \Gamma^A_{BC} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Первую серию условий интегрируемости системы (2) составляют соотношения

$$L_X T^C_{AB} = 0,\ L_X R^D_{ABC} = 0, \tag{3}$$

где T^C_{AB} и R^D_{ABC} — составляющие тензорных полей кручения и кривизны пространства $(M^n \times N^m, \nabla)$.

В настоящей работе ограничимся рассмотрением пространств аффинной связности без кручения. Тогда условия (3) равносильны системе однородных линейных уравнений

$$X^M \partial_M R^D_{ABC} + R\binom{D}{ABC}\Big|{}^F_M X^M_F = 0,$$

где $$R\binom{D}{ABC}\Big|{}^F_M = \delta^F_A R^D_{MBC} + \delta^F_B R^D_{AMC} + \delta^F_C R^D_{ABM} - \delta^D_M R^F_{ABC}. \tag{4}$$

Обозначим через *M* укороченную матрицу условий интегрируемости, элементами которой являются $R\binom{D}{ABC}\Big|^{F}_{M}$. Известно, что если *rank M=r*, то

$$\dim g(M^n \times N^m) \leq (n+m)^2+(n+m)-r.$$

Рассмотрим случай, когда $(M^n, {}^1\nabla)$ или $(N^m, {}^2\nabla)$ локально плоское, а другое является локально непроективно плоским, тогда пространство $(M^n \times N^m, \nabla)$ является локально непроективно плоским [3].В этом случае справедлива теорема, доказанная И.П. Егоровым [2]: максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в классе таких пространств не превосходит $(n+m)^2-2(n+m)+5$.

Теперь рассмотрим случай, когда пространства $(M^n, {}^1\nabla)$ и $(N^m, {}^2\nabla)$ являются локально непроективно плоскими. В этом случае пространство $(M^n \times N^m, \nabla)$ является непроективно плоским и имеет место

Теорема 1. *Если составляющие* ${}^1R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$ *и* ${}^2R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$ *тензоров кривизны пространств* $(M^n, {}^1\nabla)$ *и* $(N^m, {}^2\nabla)$ *отличны от нуля, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения таких пространств не превосходит* $(n+m)^2-5(n+m)+14$.

Доказательство. В пространствах $(M^n, {}^1\nabla)$, $(N^m, {}^2\nabla)$ можно выбрать карты (U, x^i), (V, x^α) такие, что $i_1=1$, $i_2=2$, $i_3=3$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3$, тогда в карте $(U\times V, x^A)$ пространства $(M^n \times N^m, \nabla)$ имеем отличные от нуля составляющие вида R^1_{223} и $R^{n+1}_{n+2\ n+2\ n+3}$. Рассмотрим матрицу, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных

$$X^B_1 (B>1), X^2_D (D\geq 3), X^3_C (C\geq 4), X^1_1, X^E_{n+1} (E\neq 2,3,n+1),$$
$$X^{n+2}_F (F\neq 1,n+1,n+2), X^{n+3}_K (K\neq 1,n+1,n+2,n+3), X^{n+1}_{n+1}$$

в уравнениях

$\binom{M}{223}(M>1)$, $\binom{1}{P23}$ $(P\geq 3)$, $\binom{1}{22N}$ $(N\geq 4)$, $\binom{1}{223}$,

$\binom{S}{n+2n+2n+3}$ $(S\neq 2,3,n+1)$, $\binom{n+1}{Zn+2n+3}$ $(Z\neq 1,n+1,n+2)$,

$\binom{n+1}{n+2n+2T}$ $(T\neq 1,n+1,n+2,n+3)$, $\binom{n+1}{n+2n+2n++3}$.

По формулам (4) имеем:

$R({}_{223}{}^{M}|_{B}{}^{1})=-\delta_{B}{}^{M}R^{1}{}_{223}$;

$R({}_{P23}{}^{1}|_{B}{}^{1})=0$, $R({}_{P23}{}^{1}|_{2}{}^{D})=\delta_{P}{}^{D}R^{1}{}_{223}$;

$R({}_{22N}{}^{1}|_{B}{}^{1})=0$, $R({}_{22N}{}^{1}|_{2}{}^{D})=0$, $R({}_{22N}{}^{1}|_{3}{}^{C})=\delta_{N}{}^{C}R^{1}{}_{223}$;

$R({}_{223}{}^{1}|_{B}{}^{1})=0$, $R({}_{223}{}^{1}|_{2}{}^{D})=0$, $R({}_{223}{}^{1}|_{3}{}^{C})=0$, $R({}_{223}{}^{1}|_{1}{}^{1})=-R^{1}{}_{223}$;

$R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{s}|_{B}{}^{1})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{s}|_{2}{}^{D})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{s}|_{3}{}^{C})=0$,

$R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{s}|_{1}{}^{1})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{s}|_{E}{}^{n+1})=-\delta_{E}{}^{s}R^{n+1}{}_{n+2\,n+2\,n+3}$;

$R({}_{Z\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{B}{}^{1})=0$, $R({}_{Z\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{2}{}^{D})=0$, $R({}_{Z\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{3}{}^{C})=0$,

$R({}_{Z\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{1}{}^{1})=0$, $R({}_{Z\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{E}{}^{n+1})=0$,

$R({}_{Z\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{n+2}{}^{F})=\delta_{Z}{}^{F}R^{n+1}{}_{n+2\,n+2\,n+3}$;

$R({}_{n+2\,n+2\,T}{}^{n+1}|_{B}{}^{1})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,T}{}^{n+1}|_{2}{}^{D})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,T}{}^{n+1}|_{3}{}^{C})=0$,

$R({}_{n+2\,n+2\,T}{}^{n+1}|_{1}{}^{1})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,T}{}^{n+1}|_{E}{}^{n+1})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,T}{}^{n+1}|_{n+2}{}^{F})=0$,

$R({}_{n+2\,n+2\,T}{}^{n+1}|_{n+3}{}^{K})=\delta_{T}{}^{K}R^{n+1}{}_{n+2\,n+2\,n+3}$;

$R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{B}{}^{1})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{2}{}^{D})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{3}{}^{C})=0$,

$R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{1}{}^{1})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{E}{}^{n+1})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{n+2}{}^{F})=0$,

$R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{n+3}{}^{K})=0$, $R({}_{n+2\,n+2\,n+3}{}^{n+1}|_{n+1}{}^{n+1})=-R^{n+1}{}_{n+2\,n+2\,n+3}$.

Из этих соотношений заключаем, что $r = 6(n+m)-14$, тогда $\dim g(M^{n}\times N^{m})\leq (n+m)^{2}-5(n+m)+14$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Рассмотрим прямое произведение пространств аффинной связности $(R^{n}, {}^{1}\nabla)$ и $(R^{m}, {}^{2}\nabla)$, где

$(R^{n},{}^{1}\nabla)$: ${}^{1}\Gamma^{1}_{23}=x^{2}$, остальные ${}^{1}\Gamma^{k}_{ij}=0$;

$(R^{m},{}^{2}\nabla)$: ${}^{2}\Gamma^{1}_{23}=x^{2}$, остальные ${}^{2}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=0$.

Для пространства $(R^{n}\times R^{m}, \nabla={}^{1}\nabla\times{}^{2}\nabla)$ связность ${}^{1}\nabla\times{}^{2}\nabla$ имеет компоненты $\Gamma^{1}_{23}=x^{2}, \Gamma^{n+1}_{n+2\ n+3}=x^{n+2}$, остальные $\Gamma^{C}_{AB}=0$. Условия интегрируемости уравнений движений в этом случае имеют вид:

$$X_1^B = 0\ (B > 1),\ X_D^2 = 0\ (D \geq 3),\ X_C^3 = 0\ (C \geq 4),\ 2X_2^2 + X_3^3 - X_1^1 = 0,$$

$$X_{n+1}^E = 0\ \ (E \neq 2{,}3, n+1),\ X_F^{n+2} = 0\ \ (F \neq 1, n+1, n+2),$$

$$X_K^{n+3} = 0\ \ (K \neq 1, n+1, n+2, n+3),\ 2X_{n+2}^{n+2} + X_{n+3}^{n+3} - X_{n+1}^{n+1} = 0.$$

Отсюда следует, что размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства ($R^n \times R^m$, $\nabla = {}^1\nabla \times {}^2\nabla$) равна $(n+m)^2 - 5(n+m) + 14$. В качестве базисных операторов можно взять следующие векторные поля:

∂_A ($A \neq 2, n+2$), $x^B \partial_C$ ($B \neq 1, n+1$; $C \neq 2, 3, n+2, n+3$),

$2x^1\partial_1 + x^2\partial_2$, $\partial_2 - x^2x^3\partial_1$, $x^2\partial_3 - (x^2)^3/3\partial_1$, $x^1\partial_1 + x^3\partial_3$,

$2x^{n+1}\partial_{n+1} + x^{n+2}\partial_{n+2}$, $\partial_{n+2} - x^{n+2}x^{n+3}\partial_{n+1}$, $x^{n+2}\partial_{n+3} - (x^{n+2})^3/3\partial_{n+1}$, $x^{n+1}\partial_{n+1} + x^{n+3}\partial_{n+3}$.

Таким образом, доказано, что указанная в теореме 1 граница — точная.

Теорема 1 допускает следующее обобщение:

Теорема 2. *Если составляющие* ${}^1R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$, ${}^2R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$, …, ${}^sR^{\theta_1}_{\theta_2\theta_2\theta_3}$ *тензоров кривизны пространств* (M^{n_1}, ${}^1\nabla$), (M^{n_2}, ${}^2\nabla$),…,(M^{n_s}, ${}^s\nabla$) ($s \geq 2$) *соответственно отличны от нуля, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения таких пространств не превосходит* $(n_1+n_2+\ldots+n_s)^2 - (3s-1)(n_1+n_2+\ldots+n_s) + 2s^2 + 3s$.

Доказательство. В пространствах (M^{n_1}, ${}^1\nabla$), (M^{n_2}, ${}^2\nabla$),8…,(M^{n_s}, ${}^s\nabla$) можно выбрать карты (U_1, x^i), (U_2,x^α),…, (U_s,x^θ) такие, что $i_1=1$, $i_2=2$, $i_3=3$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3$,…, $\theta_1=1$, $\theta_2=2$, $\theta_3=3$ соответственно, тогда в карте ($U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_{n_s}$, x^A) пространства ($M^{n_1} \times M^{n_2} \times \ldots \times M^{n_s}$, ∇) имеем отличные от нуля составляющие вида:

$$R^1_{223},\ R^{n_1+1}_{n_1+2\ n_1+2\ n_1+3}, \ldots,\ R^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}_{n_1+\ldots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\ldots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\ldots+n_{s-1}+3}.$$

Рассмотрим матрицу B, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных

$X_1^B(B > 1), X_D^2(D \geq 3), X_C^3(C \geq 4), X_1^1, X_{n_1+1}^E(E \neq 2,3, n_1+1),$

$X_F^{n_1+2}(F \neq 1, n_1+1, n_1+2), X_K^{n_1+3}(K \neq 1, n_1+1, n_1+2, n_1+3), X_{n_1+1}^{n_1+1},$

$X_{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}^A$ ($A \neq 2,3,n_1+2,n_1+3,\ldots,n_1+\ldots+n_{s-2}+2,$

$n_1+\ldots+n_{s-2}+3,n_1+\ldots+n_{s-1}+1$), $X_G^{n_1+\ldots+n_{s-1}+2}$ ($G \neq 1,n_1+1,\ldots,$

$n_1+\ldots+n_{s-1}+1, n_1+\ldots+n_{s-1}+2$), $X_H^{n_1+\ldots+n_{s-1}+3}$ ($H \neq 1,n_1+1,\ldots,$

$n_1+\ldots+n_{s-1}+1,n_1+\ldots+n_{s-1}+2,n_1+\ldots+n_{s-1}+3$), $X_{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}$

в уравнениях

$\left({}^{M}_{223}\right)$ $(M > 1)$, $\left({}^{1}_{P23}\right)$ $(P \geq 3)$, $\left({}^{1}_{22N}\right)$ $(N \geq 4)$,

$\left({}^{1}_{223}\right)$, $\left({}^{S}_{n_1+2\; n_1+2\; n_1+3}\right)$ $(S \neq 2,3, n_1+1)$, $\left({}^{n_1+1}_{Z\; n_1+2\; n_1+3}\right)$ $(Z \neq 1, n_1+1, n_1+2)$, $\cdots$

$\left({}^{n_1+1}_{n_1+2\; n_1+2\; T}\right)$ $(T \neq 1, n_1+1, n_1+2, n_1+3)$, $\left({}^{n_1+1}_{n_1+2\; n_1+2\; n_1+3}\right)$

$\left({}^{V}_{n_1+\ldots+n_{s-1}+2\;\; n_1+\ldots+n_{s-1}+2\;\; n_1+\ldots+n_{s-1}+3}\right)$ $(V \neq 2,3, n_1+2, n_1+3,\ldots,$

$n_1+\ldots+n_{s-2}+2, n_1+\ldots+n_{s-2}+3, n_1+\ldots+n_{s-1}+1)$,

$\left({}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}_{Z\;\; n_1+\ldots+n_{s-1}+2\;\; n_1+\ldots+n_{s-1}+3}\right)$ $(Z \neq 1, n_1+1, n_2+2,\ldots, n_1+\ldots+n_{s-1}+1,$

$n_1+\ldots+n_{s-1}+2)$, $\left({}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}_{n_1+\ldots+n_{s-1}+2\;\; n_1+\ldots+n_{s-1}+2\;\; T}\right)$ $(T \neq 1, n_1+1, n_1+2,$

$n_1+3,\ldots, n_1+\ldots+n_{s-1}+1, n_1+\ldots+n_{s-1}+2, n_1+\ldots+n_{s-1}+3)$,

$\left({}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}_{n_1+\ldots+n_{s-1}+2\;\; n_1+\ldots+n_{s-1}+2\;\; n_1+\ldots+n_{s-1}+3}\right)$.

Найдем ранг матрицы B:

$r=3(n_1+n_2+\ldots+n_s)s-(1+3+5+\ldots+2(s-1)+1)-(2+3+4+\ldots+(s+1))$ $-(3+4+5+\ldots+s+2)+s=3s(n_1+n_2+\ldots+n_s)-2s^2+3s$, тогда

$\dim g\,(M^{n_1} \times M^{n_2} \times \ldots \times M^{n_s}) \leq (n_1+n_2+\ldots+n_s)^2-(3s-1)(n_1+n_2+\ldots+n_s)+$ $+2s^2+3s$.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Указанная в теореме 2 граница — точная. Доказательство этого утверждения проводится аналогично случаю s=2.

Следствие. Если из m пространств s пространств с отличными от нуля составляющими ${}^1R^{i_1}_{i_2i_2i_3}$, ${}^2R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$, …, ${}^sR^{\theta_1}_{\theta_2\theta_2\theta_3}$ тензоров кривизны пространств ($M^{n_1}, {}^1\nabla$), ($M^{n_2}, {}^2\nabla$),…, ($M^{n_s}, {}^s\nabla$)($s \geq 2$)

соответственно а остальные пространства локально плоские, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения таких пространств не превосходит $(n_1+n_2+\ldots+n_m)^2-(3s-1)(n_1+n_2+\ldots+n_m)+$

$+2s^2+3s$.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1985.

2. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Ученые записки. Казань, 1965.

3. *Моргун М.В.* Некоторые свойства прямого произведения линейных связностей // Движения в обобщенных пространствах. Пенза, 2005. С. 84—90.

4. *Султанов А.Я.* О максимальной размерности интранзитивных групп движений пространств аффинной связности//Движения в обобщенных пространствах. Пенза. 2000. С.79—90.

M. Morgun

ABOUT LIE ALGEBRAS DIMENSION OF INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS OF PRODUCTS SPACES OF AFFINE CONNECTIVITY

The Lie algebras dimension of infinitesimal affine transformations of products of two spaces of affine connectivity is provided with the condition that one of them is not locally projective-flat.

УДК 514.75

О.М. Омельян

(Российский государственный университет им. Иммкнуила Канта)