Список литературы

1. *Степанов С.Е.* О классификации структур почти произведения на многообразии с линейной связностью // Изв. вузов. Сер. Математика. 1999. №1 (440). С. 61—68.
2. *Паньженский В.И.* Инвариантные характеристики некоторых классов почти эрмитовых структур // Тр. геом. семинара. Вып. 23. Казань, 1997. С. 77—83.

O. Suhova

THE INVARIANT CHARACTERISTICS STEPANOV'S CLASSES OF ALMOST-PRODUCT STRUCTURES ON THE TANGENT BUNDLE

The invariant characteristics Stepanov's classes of almost-product structures are obtained for the case, when the original manifold is the tangent bundle, π-structure is defined by infinitesimal connection and the linear connection is the Levi-Civita connection of Hermitian metric of the almost-product structure.

УДК 514.754

А.В. Чакмазян

(Армянский государственный педагогический университет)

О ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Методом внешних форм Картана исследуются свойства такой оснащенной гиперповерхности M_m аффинного пространства A_{n+1}, которая относительно индуцированной связности является полусимметрическим подмногообразием.

§1. Основные определения и формулировка результатов

Подмногообразие M_m в n-мерном пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ называется полусимметрическим, если его вторая фундаментальная форма α_2 удовлетворяет условию

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \alpha_2 = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \alpha_2,$$

где $\overline{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена — Бортолотти, а X, Y — произвольные касательные векторные поля на M_m. Это условие равносильно симметричности фундаментальной формы $\alpha_4 = \overline{\nabla}\ \overline{\nabla}\ \alpha_2$ [1].

Полное освещение результатов и подробная библиография о полу-симметрических подмногообразиях в пространствах постоянной кривизны $M_n(c)$ приведены в обзорных статьях Ю.Г. Лумисте [2] и В.А. Мирзояна [3]. Полусимметрические подмногообразия в аффинном и проективном пространствах относительно мало исследованы.

Поверхность M_m, погруженная в проективное пространство P_n назы-вается нормализованной в смысле А.П. Нордена [4; 5], если к каждой точке $x \in M_m$ этой поверхности инвариантно присоединены гладко зависящие от x:

а) нормаль первого рода N_x, т. е. (n-m)-мерная плоскость, проходящая через точку x и не имеющая с касательной плоскостью $T_x(M_m)$ других общих точек;

б) нормаль второго рода, т. е. (m-1)-мерная плоскость лежащая в касательной плоскости $T_x(M_m)$ и не проходящая через точку x.

Нормализация поверхности M_m, заданной в аффинном пространстве A_n, называется аффинной [4], если нормали второго рода n лежат в несобственной гиперплоскости Ω пространства A_n. Аффинная нормализация поверхности M_m

подчинена той нормализации пространства, которая всякой его точке относит несобственную гиперплоскость Ω. Существенную роль здесь играет лишь поле нормалей первого рода. Поэтому в тех случаях, когда имеют дело с аффинно нормализованной поверхностью, часто говорят об оснащенной поверхности.

Оснащение гиперповерхности M_m, вложенной в A_{n+1}, называется центральным если все нормали к этой поверхности проходят через одну и ту же точку [5]. Имеет место следующая

Теорема 1 [6]. *Для того чтобы оснащение гиперповерхности M_n, вложенной в A_{n+1}, было центральным, необходимо и достаточно, чтобы $H_i^j = \varphi\delta_i^j$, где φ — инвариант, а величины H_i^j определяются уравнением (4).*

Оснащение гиперповерхности M_n, вложенной в A_{n+1}, называется тривиальным, если нормальные прямые во всех точках гиперповерхности параллельны некоторому постоянному вектору. Критерий тривиальности оснащения дает следуюшая

Теорема 2 [6]. *Для того чтобы оснащение гиперповерхности было тривиальным, необходимо и достаточно, чтобы $H_i^j = 0$.*

Основные результаты настоящей работы сформулированы в следующих утверждениях.

Лемма. *Условие полусимметричности гиперповерхности в аффинном пространстве равносильно условию симметричности четвертой фундаментальной формы этой гиперповерхности.*

Теорема 3. *Оснащение индуцирует на гиперповерхности M_n в A_{n+1} связность, относительно которой M_n является полусимметрическим подмногообразием тогда и только тогда, когда*

$$h_{(ij}h_{k)m}H_l^m - h_{(ij}h_{l)m}H_k^m = 0.$$

Теорема 4. *Если тангенциально невырожденная гиперповерхность M_n в аффинном пространстве A_{n+1} оснащена и все нормали проходят через одну и ту же точку (центральное* *оснащение) или все нормали параллельны постоянному вектору (тривиальное оснащение), то это оснащение индуцирует на гиперповерхности геометрию полусимметрического подмногообразия. Если $\varphi \neq 0$, то касательная связность гиперповерхности является эквипроективной, при $\varphi = 0$ M_n является аффинной гиперплоскостью.*

§2. Аппарат исследования

Рассмотрим (n+1)-мерное аффинное пространство A_{n+1} и присоединим к его текущей точке x подвижной репер $[x, e_I]$ при I, K, L = 1,…, n + 1. Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера имеют вид

$$dx = \omega^I e_I,\ de_I = \omega_I^K e_K, \qquad (1)$$

где ω^I, ω_I^K — формы от дифференциалов параметров. Внешнее дифференцирование этих соотношений приводит к следующим структурным уравнениям:

$$d\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K^I,\ d\omega_I^K = \omega_I^L \wedge \omega_L^K. \qquad (2)$$

Пусть в пространстве A_{n+1} задана n-мерная гладкая гиперповерхность M_n, оснащенная при помощи гладкого поля прямых, дополняющих касательные плоскости до всего A_{n+1}, т.е. нормалей первого рода, по А.П. Нордену [4, с. 242]. На M_n возникают касательное и нормальное векторные расслоения $T(M_n)$ и $N(M_n)$. Если в текущей точке x гиперповерхности M_n присоединить подвижной репер первого порядка, адаптированный к данному оснащению, то уравнения этой гиперповерхности примут следующий вид:

$$\omega^{n+1} = 0,\ \omega_i^{n+1} = h_{ij}\,\omega^j\ \ (h_{ij} = h_{ji}); \qquad (3)$$

$$\omega_{n+1}^i = H_j^i\,\omega^j\ \ (i, j,\ldots = 1,\ldots, n). \qquad (4)$$

Здесь второе соотношение в уравнениях (3) получается из первого дифференциальным продолжением, т. е. использованием структурных уравнений (2) с применением леммы Картана. Уравнения (4) выражают условие принадлежности вектора e_{n+1} нормали.

Если учесть уравнения (2—4), то структурные уравнения можно преобразовать к следующему виду:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j,$$
$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \frac{1}{2} R^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l, \quad d\omega^{n+1}_{n+1} = \frac{1}{2} R^{n+1}_{n+1kl}\, \omega^k \wedge \omega^l, \tag{5}$$

где

$$R^i_{jkl} \square= h_{jk} H^i_l - h_{jl} H^i_k, \quad R^{n+1}_{n+1kl} \square= h_{ik} H^i_l - h_{il} H^i_k. \tag{6}$$

Как известно [7], в касательном расслоении $T(M_n)$ возникает аффинная связность ∇ без кручения, а в нормальном расслоении $N(M_n)$ — центроаффинная связность $\nabla^{\perp}$, которую в дальнейшем будем называть нормальной связностью оснащенной гиперповерхности. Если $R^{n+1}_{n+1kl} \square= 0$, то говорят о гиперповерхности с плоской нормальной связностью. Свертыванием по индексам i и l из первого равенства в выражениях (6) получаем следующее выражение для тензора Риччи:

$$R_{jk} = R^l_{jkl} = h_{jk} H^l_l - h_{jl} H^l_k. \tag{7}$$

Пара связностей ∇ и $\nabla^{\perp}$ рассматривается как связность в расслоении $T(M_n) \oplus N(M_n)$. Она называется связностью Ван дер Вардена — Бортолотти оснащенной гиперповерхности M_n в A_{n+1} и обозначается через $\overline{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^{\perp}$ [8].

Внешнее дифференцирование соотношений (3) приводит к дифференциальным тождествам $\overline{\nabla} h_{ij} \wedge \omega^j = 0$, где

$$\overline{\nabla} h_{ij} = dh_{ij} - h_{kj}\, \omega^k_i - h_{ik}\, \omega^k_j + h_{ij}\, \omega^{n+1}_{n+1}.$$

Отсюда в силу леммы Картана получаем

$$\overline{\nabla} h_{ij} = h_{ijk}\omega^k,\ h_{ijk} = h_{ikj}\ (= \overline{\nabla}_k h_{ij}). \qquad (8)$$

В разложениях (3) и (8) функции h_{ij}, h_{ijk}, симметричные по нижним индексам, являются компонентами фундаментальных форм α_2 и α_3 соответственно. Эти $N(M_n)$-значные формы действуют соответственно по следующим правилам:

$$\begin{aligned} &\alpha_2 : (X, Y) \to (h_{ij} X^i Y^j) e_{n+1}, \\ &\alpha_3 : (X, Y, Z) \to (h_{ijk} X^i Y^j Z^k) e_{n+1}, \end{aligned} \qquad (9)$$

где $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, $Z = Z^k e_k$. Из разложения (8) следует, что $\alpha_3 = \overline{\nabla}\alpha_2$. Компоненты h_{ijkl} фундаментальной формы α_4 определяются соотношениями

$$\overline{\nabla} h_{ijk} = h_{ijkl}\omega^l, \qquad (10)$$

где $\overline{\nabla} h_{ijk} = dh_{ijk} - h_{ljk}\omega_i^l - h_{ilk}\omega_j^l - h_{ijl}\omega_k^l + h_{ijk}\omega_{n+1}^{n+1}$.

Форма α_4 также является $N(M_n)$-значной и ее действие определяется таким же образом, как и в правилах (9). Однако эта форма в отличие от форм α_2, α_3 симметрична лишь по первым трем индексам и в общем случае не является симметрической. Из соотношений (10) следует что $\alpha_4 = \overline{\nabla}\alpha_3$.

§3. Доказательство леммы и теорем

Доказательство леммы. Если гиперповерхность является полусимметрической, то $\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \alpha_2 = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \alpha_2$ для любых векторных полей X, Y. Полагая $X = e_k$, $Y = e_l$, получим

$$\overline{\nabla}_k \overline{\nabla}_l h_{ij} = \overline{\nabla}_l \overline{\nabla}_k h_{ij}. \qquad (11)$$

Из формул (8) и (10) следует, что

$$\overline{\nabla}_k h_{ij} = h_{ijk},\ \overline{\nabla}_l \overline{\nabla}_k h_{ij} = \overline{\nabla}_l h_{ijk} = h_{ijkl},$$
$$\overline{\nabla}_l h_{ij} = h_{ijl},\ \overline{\nabla}_k \overline{\nabla}_l h_{ij} = \overline{\nabla}_k h_{ijl} = h_{ijlk}.$$

Теперь легко видеть, что условие (11) равносильно условию $h_{ijkl} = h_{ijlk}$, которое фактически является аналитическим условием симметричности фундаментальной формы α_4. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Дифференцируя внешним образом соотношения (8), получим

$$-dh_{kj} \wedge \omega_i^k - h_{kj} d\omega_i^k - dh_{ik} \wedge \omega_j^k - h_{ik} d\omega_j^k + dh_{ij} \wedge \omega_{n+1}^{n+1} + h_{ij} d\omega_{n+1}^{n+1} =$$
$$= dh_{ijk} \wedge \omega^k + h_{ijk} d\omega^k.$$

Если учесть уравнения (5; 6; 8), то последнее равенство примет следующий вид:

$$(\overline{\nabla} h_{ijk} + 3h_{(ij} h_{k)m} \omega_{n+1}^m) \Lambda \omega^k = 0.$$

Отсюда в силу соотношений (4) и (10) имеем

$$h_{ijkl} \omega^k \wedge \omega^l + 3 h_{(ij} h_{k)m} H_l^m \omega^l \wedge \omega^k = 0.$$

Преобразуя это равенство, окончательно получаем

$$h_{ij[kl]} - 3 h_{(ij} h_{[k)m} H_{l]}^m = 0. \qquad (12)$$

В силу доказанной леммы из выражений (12) следует, что оснащение индуцирует на гиперповерхности связность, относительно которой M_n является полусимметрическим подмногообразием тогда и только тогда, когда

$$h_{(ij} h_{k)m} H_l^m - h_{(ij} h_{l)m} H_k^m = 0. \qquad (13)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Так как оснащение гиперповерхности является центральным, то в силу теоремы 1 $H_i^j = \varphi\delta_i^j$. Подставляя величины H_i^j в выражения (12), получим

$$h_{ij[kl]} - 3 h_{(ij} h_{[k)|m|} \delta_{l]}^m = 0.$$

Так как здесь второе слагаемое равно нулю, то $h_{ij[kl]} = 0$ и гиперповерхность является полусимметрической. Опять-таки в силу того, что оснащение гиперповерхности является центральным, а также по теореме 1 соотношение (7) принимает следующий вид:

$$R_{jk} = (n-1)\varphi\, h_{jk} \quad \text{или} \quad h_{jk} = \frac{1}{(n-1)\varphi} R_{jk},$$

откуда получаем

$$R^{i}_{jkl} = \frac{1}{(n-1)} R_{jk}\delta^{i}_{l} - \frac{1}{(n-1)} R_{jl}\delta^{i}_{k}, \quad R_{jk} = R_{kj}.$$

Это соотношение показывает, что центральное оснащение индуцирует на гиперповерхности M_n эквипроективную связность [4, с. 69].

Если $\varphi = 0$, то из равенств (6) следует, что $R^{i}_{jkl} = 0$, $R^{n+1}_{n+1kl} = 0$ и гиперповерхность M_n является геодезической, т.е. аффинной гиперплоскостью. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Lumiste U.* Semi-symmetric submanifolds as the second order envelope of symmetric submanifolds / Proc. Estonian Acad. Sci., Phys. Math. 1990. V. 39. №1. P. 1—8.

2. *Лумисте Ю.Г.* Полусимметрические подмногообразия // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1991. Т. 23. С. 3—26.

3. *Мирзоян В.А.* Ric-полусимметрические подмногообразия // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1991. Т. 23. С. 29—66.

4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

5. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam, 1993.

6. *Атанасян Л.С.* Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве // Тр. семинара. по векторному и тензорному анализу. М.; Л., 1952. Вып. 9. С. 351—410.

7. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

8. *Chen B.Y.* Geometry of submanifolds. New York, 1973.

A. Chakmazyan

ABOUT SEMISYMMETRIC HYPERSURFACES
OF AFFINE SPACE

Using the method of exterior forms equipped hypersurface M_n in (n+1)-dimensional affine space A_{n+1} is studied. It's proved that equipment induces connection of the semisymmetric submanifold on M_n if and only if $h_{(ij}h_{k)m}H^m_l - h_{(ij}h_{l)m}H^m_k = 0$, where h_{ij} are coefficients of the second fundamental form on M_n. Moreover if the tangentially nondegenerate hypersurface in A_{n+1} is equipped and all normales of this hypersurface contain the same point (central equipment) or all these normals are parallel to the same vector (trivial equipment) then this equipment induces the geometry of semisymmetric submanifold on M_n, the tangent connection on M_n is equiprojective when $H^m_l \neq 0$ and hypersurface is an affine hyperplane when $H^m_l = 0$.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ЦЕНТРОПРОЕКТИВНАЯ СВЯЗНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА

Рассмотрено каноническое пространство проективной связности Картана со структурными уравнениями, являющимися уравнениями специального расслоения центропроективных реперов. Задание связности в этом расслоении привело к пространству центропроективной связности. Найдены дифференциальные сравнения для