Dual normal connections in the bundle of normals of the 1-st and 2-nd kind for the base surface of the strip $\Pi_{r(m)} \subset P_n$ are considered.

УДК 514.76

Ю. А. Трофимов

(Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского)

О КАНОНИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ СВЯЗНОСТИ НА РАССЛОЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ РЕПЕРОВ

Рассматриваются вопросы, связанные с канонической плоской связностью на расслоении линейных реперов. Вычисляются коммутаторы базисных векторных полей, компоненты тензоров кривизны и кручения, значения этой связности на векторных полях специального вида.

В работе [1] вводятся понятия линейного репера, расслоения линейных реперов, адаптированного репера на координатной окрестности.

Пусть M_n — связное, дифференцируемое класса C^∞ многообразие размерности n, $L(M_n)$ — расслоение линейных реперов над M_n, $\{U, x^i\}$ — координатная окрестность на M_n, $\{\pi^{-1}(U), (x^i, x^i_\alpha)\}$ — координатная окрестность на $L(M_n)$.

Пусть на M_n задана линейная связность ∇ без кручения. Тогда мы можем построить лифты тензорных полей с базы в расслоение $L(M_n)$. Если $\{\partial_i\} = \{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ и $\{dx^i\}$ — поля натурального репера и корепера на M_n, то $\{\partial_i^H, \partial_i^{(\alpha)}\}$ и $\{(dx^i)^V, (dx^i)^{He_\alpha}\}$ — поля адаптированного к связности ∇ репера и корепера соответственно на расслоении. Здесь $\partial_i^H = \partial_i - \Gamma_{ij}^t x_\sigma^j \partial_t^\sigma$ — горизонтальный лифт векторных полей натурального репера из M_n в $L(M_n)$, $\partial_i^{(\alpha)}$ — вертикальный (α)-лифт, определяемый в общем виде следующим образом:

$$X^{V\xi^*}\omega^{w\xi} = \xi^*(\xi)(\omega(X))^V,$$

где $\xi \in \mathbb{R}_n$, $\xi^* \in \mathbb{R}_n^*$, $\omega \in \Gamma_1^0(M_n)$ — линейная форма, и

$$\forall p_x \in L(M_n) \;\; \omega^{w\xi}(p_x) = \omega_x(p_x\xi).$$

Если $\xi^* = e^\alpha$, то $X^{Ve^*} = X^{(\alpha)}$ и $\partial_i^{(\alpha)} = \partial_i^\alpha$ [1].

Наряду с репером $\{\partial_i^H, \partial_i^{(\alpha)}\}$ рассмотрим на $\{\pi^{-1}(U), (x^i, x_\alpha^i)\}$ репер $\{E_\alpha, E_\alpha^\beta\}$, где $E_\alpha = x_\alpha^k \partial_k^H$ и $E_\alpha^\beta = x_\alpha^k \partial_k^{(\beta)}$.

Известно, что линейная связность $\overline{\nabla}$ на $L(M_n)$ называется канонической плоской связностью, если выполняются следующие условия:

$$\overline{\nabla}_{E_\alpha} E_\beta = 0,\; \overline{\nabla}_{E_\alpha} E_\beta^\gamma = 0,\; \overline{\nabla}_{E_\alpha^\gamma} E_\beta = 0,\; \overline{\nabla}_{E_\alpha^\gamma} E_\beta^\sigma = 0.$$

Непосредственно из определения следует, что все компоненты такой связности относительно репера $\{E_\alpha, E_\beta^\gamma\}$ равны нулю, т.е. $\overline{\Gamma}_{BC}^A = 0$ для всех $A, B, C \in \{\alpha, (_\beta^\gamma)\}$, $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n)$.

Найдем коммутаторы векторных полей репера $\{E_\alpha, E_\alpha^\beta\}$. Из формулы

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

получим:

$$[E_\alpha, E_\beta] = [x_\alpha^k \partial_k^H, x_\beta^m \partial_m^H] = -R_{lkm}^i x_\alpha^k x_\beta^m x_\gamma^l x_i^\sigma E_\sigma^\gamma,$$

$$[E_\alpha, E_\beta^\gamma] = [x_\alpha^k \partial_k^H, x_\beta^m \partial_m^{(\gamma)}] = -\delta_\alpha^\gamma E_\beta = -\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\sigma E_\sigma,$$

$$[E_\alpha^\beta, E_\gamma] = [x_\alpha^k \partial_k^{(\beta)}, x_\gamma^m \partial_m^H] = \delta_\gamma^\beta E_\alpha = \delta_\gamma^\beta \delta_\alpha^\sigma E_\sigma,$$

$$[E_\alpha^\beta, E_\gamma^\sigma] = [x_\alpha^k \partial_k^{(\beta)}, x_\gamma^m \partial_m^{(\sigma)}] = \delta_\gamma^\beta E_\alpha^\sigma - \delta_\alpha^\sigma E_\gamma^\beta =$$

$$= (\delta_\gamma^\beta \delta_\tau^\sigma \delta_\alpha^\nu - \delta_\alpha^\sigma \delta_\tau^\beta \delta_\gamma^\nu) E_\nu^\tau .$$

Из этих равенств видно, что репер $\{E_\alpha, E_\alpha^\beta\}$ является неголономным. Объект неголономности $\overline{\Omega}{}_{AB}^C$, определенный условиями $[E_A, E_B] = \overline{\Omega}{}_{AB}^C E_C$, имеет следующие компоненты:

$$\overline{\Omega}{}_{\alpha\beta}^{\binom{\gamma}{\sigma}} = -R_{lkm}^i x_\alpha^k x_\beta^m x_\gamma^l x_i^\sigma , \ \overline{\Omega}{}_{\alpha\binom{\gamma}{\beta}}^\sigma = -\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\sigma ,$$

$$\overline{\Omega}{}_{\binom{\beta}{\alpha}\gamma}^\sigma = \delta_\gamma^\beta \delta_\alpha^\sigma , \ \overline{\Omega}{}_{\binom{\beta}{\alpha}\binom{\sigma}{\gamma}}^{\binom{\tau}{\nu}} = \delta_\gamma^\beta \delta_\tau^\sigma \delta_\alpha^\nu - \delta_\alpha^\sigma \delta_\tau^\beta \delta_\gamma^\nu .$$

Остальные $\overline{\Omega}{}_{AB}^C = 0$.

Далее найдем компоненты тензорного поля кручения $\overline{T}$ связности $\overline{\nabla}$ в репере $\{E_\alpha, E_\beta^\gamma\}$. Из формулы

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

получим в нашем случае:

$$\overline{T}(E_A, E_B) = \overline{\nabla}_{E_A} E_B - \overline{\nabla}_{E_B} E_A - [E_A, E_B] = -[E_A, E_B].$$

Так как коммутаторы базисных векторных полей у нас уже найдены, то:

$$\overline{T}(E_\alpha, E_\beta) = R_{lkm}^i x_\alpha^k x_\beta^m x_\gamma^l x_i^\sigma E_\sigma^\gamma ,$$

$$\overline{T}(E_\alpha, E_\beta^\gamma) = \delta_\alpha^\gamma E_\beta = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\sigma E_\sigma ,$$

$$\overline{T}(E_\alpha^\beta, E_\gamma) = -\delta_\gamma^\beta E_\alpha = -\delta_\gamma^\beta \delta_\alpha^\sigma E_\sigma ,$$

$$\overline{T}(E_\alpha^\beta, E_\gamma^\sigma) = -(\delta_\gamma^\beta E_\alpha^\sigma - \delta_\alpha^\sigma E_\gamma^\beta) = (\delta_\alpha^\sigma \delta_\tau^\beta \delta_\gamma^\nu - \delta_\gamma^\beta \delta_\tau^\sigma \delta_\alpha^\nu) E_\nu^\tau .$$

Таким образом, компоненты поля $\overline{T}$ имеют вид

$$\overline{T}^{\binom{\sigma}{\gamma}}_{\alpha\beta} = R^i_{lkm} x^k_\alpha x^m_\beta x^l_\gamma x^\sigma_i \,,\; \overline{T}^{\sigma}_{\alpha\binom{\gamma}{\beta}} = \delta^\gamma_\alpha \delta^\sigma_\beta \,,$$

$$\overline{T}^{\sigma}_{\binom{\beta}{\alpha}\gamma} = -\delta^\beta_\gamma \delta^\sigma_\alpha \,,\; \overline{T}^{\binom{\tau}{\nu}}_{\binom{\beta}{\alpha}\binom{\sigma}{\gamma}} = \delta^\sigma_\alpha \delta^\beta_\tau \delta^\nu_\gamma - \delta^\beta_\gamma \delta^\sigma_\tau \delta^\nu_\alpha \,.$$

Остальные $\overline{T}^{C}_{AB} = 0$.

Нетрудно убедиться и в том, что все компоненты тензорного поля кривизны связности $\overline{\nabla}$ также равны нулю. Действительно, используя формулу

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \,,$$

получим в нашем случае:

$$\overline{R}(E_A, E_B)E_C = \overline{\nabla}_{E_A} \overline{\nabla}_{E_B} E_C - \overline{\nabla}_{E_B} \overline{\nabla}_{E_A} E_C - \overline{\nabla}_{[E_A,E_B]} E_C \,.$$

Очевидно, что первые два слагаемых в формуле равны нулю (следует из определения канонической плоской связности). Остается показать, что третье слагаемое также равно нулю.

Действительно, перебирая все возможные комбинации для $A, B \in \{\alpha, \binom{\gamma}{\beta}\}$ и используя формулу $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$, непосредственными расчетами убеждаемся, что все $\overline{\nabla}_{[E_A,E_B]} E_C = 0$.

Таким образом, все компоненты тензорного поля кривизны $\overline{R}^{A}_{BCM} = 0$.

Вычислим значения связности $\overline{\nabla}$ на векторных полях $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ в случае, когда они являются горизонтальным или вертикальным лифтами с базы M_n в расслоение $L(M_n)$.

На M_n векторные поля X и Y представимы в виде: $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^j \partial_j$. На расслоении $L(M_n)$ получим:

$$X^H = X^i \partial^H_i \,,\; X^{(\alpha)} = X^i \partial^{(\alpha)}_i \,,\; Y^H = Y^i \partial^H_i \,,\; Y^{(\alpha)} = Y^i \partial^{(\alpha)}_i \,.$$

Тогда, перебирая все возможные комбинации и используя формулы

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \,,\; \nabla_X (gY) = X(g)Y + g \nabla_X Y \,,$$

получим:

$$\overline{\nabla}_{X^H} Y^H = \overline{\nabla}_{X^i \partial_i^H}(Y^j \partial_j^H) = (X^i \partial_i (Y^j))\partial_j^H + (X^i Y^j \Gamma_{ij}^k)\partial_k^H, \qquad (1)$$

$$\overline{\nabla}_{X^H} Y^{(\alpha)} = \overline{\nabla}_{X^i \partial_i^H}(Y^j \partial_j^{(\alpha)}) = (X^i \partial_i (Y^j))\partial_j^{(\alpha)} + (X^i Y^j \Gamma_{ij}^k)\partial_k^{(\alpha)}, \quad (2)$$

$$\overline{\nabla}_{X^{(\alpha)}} Y^H = \overline{\nabla}_{X^i \partial_i^{(\alpha)}}(Y^j \partial_j^H) = -X^i Y^j x_j^\alpha \partial_i^H, \qquad (3)$$

$$\overline{\nabla}_{X^{(\alpha)}} Y^{(\beta)} = \overline{\nabla}_{X^i \partial_i^{(\alpha)}}(Y^j \partial_j^{(\beta)}) = -X^i Y^j x_j^\alpha \partial_i^{(\beta)}. \qquad (4)$$

Используя свойства $(fX)^H = f_{(0)} X^H$ и $(fX)^{(\alpha)} = f_{(0)} X^{(\alpha)}$, равенства (1) и (2) перепишутся в безиндексной форме следующим образом:

$$\overline{\nabla}_{X^H} Y^H = (\overline{\nabla}_X Y)^H, \ \overline{\nabla}_{X^H} Y^{(\alpha)} = (\overline{\nabla}_X Y)^{(\alpha)}.$$

Для записи в безиндексной форме равенств (3) и (4) воспользуемся лифтом $\xi^* \omega^* : \Gamma_0^1(M_n) \to \Gamma_0^0(L(M_n))$, рассмотренным в работе [1]:

$$X^{\xi^* \omega^*}(p_x) = \xi^*(p_x^{-1}(X_x)) \text{ для любого } \xi^* \in \mathbb{R}_n^*.$$

Или в координатах:

$$X^{\xi^* \omega^*} = X^{[\xi^*]} = \xi_\alpha x_i^\alpha X^i, \text{ где } \xi^* = \xi_\alpha e^\alpha.$$

В нашем случае, считая, что $\xi^* = e^\alpha$, получим:

$$X^{[e^\alpha]} = X^i x_i^\alpha.$$

С учетом последнего равенства (3) и (4) перепишутся в виде

$$\overline{\nabla}_{X^{(\alpha)}} Y^H = -Y^{[\alpha]} X^H, \ \overline{\nabla}_{X^{(\alpha)}} Y^{(\beta)} = -Y^{[\alpha]} X^{(\beta)}.$$

Список литературы

1. *Султанов А.Я.* О продолжении римановых метрик из дифференцируемого многообразия в его расслоение линейных реперов // Математика. Изв. вузов. 1992. №6. С. 93—102.

2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

Y. Trofimov

ON CANONICAL FLAT CONNECTION
ON LINEAR FRAME BUNDLE

In the article there are considered questions, connected with canonical flat connection on linear frame bundle. We calculated commutators of base vector fields, components of curvature and torsion tensors, values of this connection on vector fields of special types.

УДК 514.76

Н. А. Тяпин

(Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского)

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ

Найдена алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов и структурные тензоры трехмерной почти контактной метрической структуры 3-го класса Танно.

1. Пусть M — нечетномерное гладкое многообразие $\dim M = 2n+1$. Почти контактной структурой на многообразии M называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ — векторное поле, называемое характеристическим, Φ — поле тензора типа (1,1), называемое структурным тензором, при этом должны выполнятся следующие условия:

1) $\eta(\xi) = 1$; 2) $\eta \circ \Phi = 0$; 3) $\Phi(\xi) = 0$; 4) $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$.

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g = \langle , \rangle$, такая что